



浙江工业大学
ZHEJIANG UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

本科毕业设计论文

设计（论文）

题目：曲面的Gauss-Bonnet定理及其应用

指导

教师：周显潮

学 生

姓名：陈 啸

学 生

学 号：201610790403

院 系：

理 学 院

专 业：

数学与应用数学

班 级：

1602班

曲面的Gauss-Bonnet定理及其应用

学生姓名：陈啸

指导教师：周显潮

浙江工业大学理学院

摘 要

本文系统地总结了曲面版本的Gauss-Bonnet定理的证明。

首先，我们回顾了点集拓扑学的基础知识，重温了微分流形的基本概念。同时介绍了曲面的几何。接着，我们给出了覆盖空间的同伦提升性质及若干推论。证明了平面和曲面的分段光滑简单闭曲线的旋转指标定理。并给出了局部Gauss-Bonnet定理的证明。然后，我们介绍了单纯复形、单纯剖分与重心重分技术。同时回顾了与Euler示性数相关的拓扑学知识。从而证明了整体Gauss-Bonnet定理。

最后，我们给出了Gauss-Bonnet定理的两个应用：Poincaré-Hopf指标定理；引力透镜理论。

关键词： Gauss-Bonnet定理 曲率积分 旋转指标定理 Euler示性数

The Gauss-Bonnet Theorem for Surfaces and Its Applications

Student: Chen Xiao

Advisor: Zhou Xianchao

College of Science
Zhejiang University of Technology

Abstract

In this article, we systematically summarize the proof of the Gauss-Bonnet theorem for surfaces.

Firstly, we review the basic concepts of differential manifolds and topology. Then the geometry of surfaces is also presented. Secondly, we introduce the homotopy lifting property of covering spaces and its corollaries. The theorem of turning tangents of piecewise smooth simple closed curves in planes or surfaces are proved. Moreover, the proof of local Gauss-Bonnet theorem is given. Thirdly, the simplicial complexes, triangulations and the barycentric subdivision are introduced. We review the topological knowledge related to Euler characteristic. Furthermore, the global Gauss-Bonnet theorem is proved ultimately.

Finally, we introduce two applications of the Gauss-Bonnet theorem: the Poincaré-Hopf index theorem; the gravitational lensing theory.

Keywords: The Gauss-Bonnet theorem; Curvature integral; The theorem of turning tangents; Euler characteristic.

目 录

中文摘要	1
英文摘要	2
目录	3
第一章 绪论	4
1.1 历史与推广	4
1.2 研究内容与研究方法	7
第二章 预备知识	8
2.1 微分流形的基本概念	8
2.2 曲面的几何	11
第三章 局部Gauss-Bonnet定理	16
3.1 同伦提升性质	16
3.2 旋转指标定理	20
3.3 局部Gauss-Bonnet定理	26
第四章 整体Gauss-Bonnet定理	28
4.1 单纯形和Euler示性数	28
4.2 重心重分术	35
4.3 整体Gauss-Bonnet定理	40
第五章 两个应用	43
5.1 Poincaré-Hopf指标定理	43
5.2 引力透镜理论	45
参考文献	46
致谢辞	47

第一章 绪论

本章将介绍Gauss-Bonnet定理的历史与推广，主要参考了伍鸿熙先生写于2008年的一篇总结性文章^[15]。我们还将介绍本文的研究内容和研究方法。

1.1 历史与推广

定理(Gauss版本): Gauss-Bonnet定理自发现至今已有近两百年的历史，其最初版本出现在数学王子Carl F. Gauss（图1左）于1827年撰写的历史性论文^[10]中（测地三角形版本）。

给定某正则曲面上 Σ 的一块测地三角形 $\mathbf{r} : \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S \subset \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ，记测地三角形 S 的边界 ∂S 是一条分段 C^∞ 简单闭测地曲线 γ ，则有

$$\iint_{\mathcal{D}} K dA + \sum_{i=1}^3 \rho_i = 2\pi, \quad (1)$$

其中 ρ_i 表示测地三角形在顶点处的外角。

可以看出，该定理是论断“平面三角形的外角和为 360° ”的一个推广。并且当曲面 Σ 取为球面时，由于球面的Gauss曲率为定值，所以可得球面上的测地三角形的外角和只与该三角形的面积有关，面积越大，外角和越小。这个结论在地理学上应是有用的。

定理(Bonnet-Binet版本): 本文将证明的版本，也是Gauss-Bonnet定理最为经典的版本（二维曲面版本）则是Pierre O. Bonnet（图1右）在1848年^[5]证明的。但Bonnet在自己的回忆录里写道，他曾见过Jacques Binet证明的该版本的定理。也就是说，Bonnet认为该定理是他和Binet各自独立证明的。不过我们从未在现存的历史资料中找到过Binet发表的版本。该版分为局部和整体两个定理，其中整体的定理首次将曲率积分和Euler示性数联系起来。

局部版本: 给定一块正则曲面片 $\mathbf{r} : \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S$ ，如果 \mathcal{D} 的边界 $\partial\mathcal{D}$ 是一条分段 C^∞ 简单闭曲线 $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \partial\mathcal{D}$ ，则有

$$\iint_{\mathcal{D}} K dA + \int_{\partial\mathcal{D}} k_g ds + \sum_{i=1}^k \rho_i = 2\pi, \quad (2)$$

其中 ρ_i 表示曲线 $\gamma := \mathbf{r} \circ \tilde{\gamma}$ 在点 $\gamma(s_i)$ 处的外角。

整体版本: 给定一张紧致无边的可定向的正则曲面 $f : M \xrightarrow{\cong} \Sigma$ ，则有

$$\iint_{\Sigma} K dA = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (3)$$



图 1: Carl Friedrich Gauss (1777-1855) & Pierre Ossian Bonnet (1819-1892)

定理(Hopf版本): 定理在高维推广应当归功于Heinz Hopf, 他在1925年^[13]和1926年^[14]分别发表了两篇文章, 文章描述了偶数维的紧致无边的可定向的超曲面的Gauss-Bonnet定理的形式。

给定一个 $2n$ 维紧致无边的可定向的超曲面 $f: M \xrightarrow{\cong} \Sigma \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, 则有

$$\int_{\Sigma} \Omega = \chi(\Sigma), \quad (4)$$

其中 Ω 称为超曲面 Σ 的**Gauss-Bonnet被积形式**, 是超曲面 Σ 上整体有定义的 $2n$ 次形式, 具体表达式为

$$\Omega = \frac{1}{2^{2n} \pi^n n!} \sum \epsilon_{i_1, \dots, i_{2n}} \Omega_{i_2}^{i_1} \cdots \Omega_{i_{2n}}^{i_{2n-1}}, \quad (5)$$

其中若 i_1, \dots, i_{2n} 是 $1, \dots, 2n$ 的偶排列, 则对应系数 $\epsilon_{i_1, \dots, i_{2n}}$ 取+1; 若 i_1, \dots, i_{2n} 是 $1, \dots, 2n$ 的奇排列, 则 $\epsilon_{i_1, \dots, i_{2n}}$ 取-1; 其余情况 $\epsilon_{i_1, \dots, i_{2n}}$ 取0。其中 $\{\Omega_j^i\}$ 是超曲面 Σ 上局部有定义的曲率形式。

定理(Allendoerfer-Fenchel版本): 事实上Hopf是通过超曲面的Gauss映射得到Gauss-Bonnet被积形式的, 但当欧式空间的嵌入子流形 M 的余维数大于1时, 他意识到他的这种办法遇到了瓶颈, 因为这类子流形不会有经典意义上的映到球面上的Gauss映射。到了1940年, Allendoerfer^[2]和Fenchel^[9]独立地解决了Hopf的这个问题。

给定一个 $2n$ 维的紧致无边的可定向的嵌入子流形 $f: M \xrightarrow{\cong} \Sigma \subset \mathbb{R}^{2n+k}$, 则有

$$\int_{\Sigma} \Omega = \chi(\Sigma). \quad (6)$$

有趣的是, 当时居住美国的Allendoerfer在研究了Weyl在前一年发表的关于“管”的文章之后, 充分地利用了它来证明得到上述定理。但身处丹麦的Fenchel由于战争原因和美国的期刊断了联系。所以

他只能在脱离Weyl的文章的情况下强行证明上述定理，每次在由纤维中的单位球面上的形式 Ω^T 的平均值给出 Ω 形式的时候，他都要归结成Lipschitz-Killing曲率来做计算。

并且，由于1940年没有Nash嵌入定理，所以Gauss-Bonnet定理对于一般Riemann流形是否有效仍然不得而知。

定理(Allendoerfer-Weil版本): 1943年，Allendoerfer和Weil将子流形的证明推到了极限，他们得到了适用于Riemann流形的Gauss-Bonnet定理^[3]。但这个证明本质上用了以下几点：

- I. Riemann流形的局部等距嵌入（基于Cartan-Janet嵌入定理和Whitney嵌入定理）；
- II. 子流形的Gauss-Bonnet定理；
- III. 形如曲面情形下将局部结果扩展为整体结果的组合学论证。

给定一个 $2n$ 维的紧致无边的可定向的Riemann流形 M ，则有

$$\int_M \Omega = \chi(\Sigma)。 \quad (7)$$

但正如在证明曲面的Gauss-Bonnet定理时的情况一样，这仍然只是一种外蕴的证明。作为该证明的作者之一，Weil当然敏锐地意识到了的这个缺陷。

定理(Chern版本和Chern-Bao版本): 1943年8月，陈省身先生在访问Princeton高等研究院的时候注意到了Gauss-Bonnet定理的这个问题，他通过引入一个全新的内蕴的想法在数周内解决了它^{[7][8]}。该证明的意义还在于首次说明了流形的纤维丛在微分几何中是必不可少的。

给定一个 $2n$ 维的紧致的可定向的Riemann流形 M ，则有

$$\int_M \Omega = \chi(\Sigma)。 \quad (8)$$

陈先生证明有两个很好的想法。一个是Gauss-Bonnet被积形式 Ω 在单位球丛 $S(M)$ 上是恰当形式。另一个是由于 Ω 是 M 上的最高维数的形式，所以它自动是闭的，因此根据de Rham定理，它表示了一个上同调类。Gauss-Bonnet定理陈述了一个事实，可以通过 M 上任何Riemann度量的曲率形式给出一个 M 的Euler类的正规表示。

在1996年，陈先生与David Bao一起，进一步将Gauss-Bonnet定理推广到了Finsler流形上^[4]。

给定一个 $2n$ 维的紧致的可定向的Finsler流形 M ，则有

$$\int_M \Omega = \chi(\Sigma)。 \quad (9)$$

1.2 研究内容与研究方法

本文会详细总结经典Gauss-Bonnet定理的证明，同时将介绍Gauss-Bonnet定理的若干应用。

本文首先介绍点集拓扑的基本知识，并引入光滑流形与正则曲面的定义，介绍一次、二次微分形式与曲面结构方程（Gauss方程），曲面的内蕴几何学，以及测地曲率的定义。接着本文介绍覆盖空间的定义，总结同伦提升性质及若干推论，证明平面和曲面的（分段） C^∞ 简单闭曲线的旋转指标定理，以及证明局部Gauss-Bonnet定理。而后本文介绍单纯复形与单纯剖分，回顾与Euler示性数相关的一系列拓扑学知识，介绍重心重分技术，以及证明整体Gauss-Bonnet定理。最后本文会介绍Gauss-Bonnet定理在切向量场理论和引力透镜理论的应用。

本文涉及的研究方法主要有活动标架法、Stokes公式、同伦提升理论、单纯剖分法、同调理论、重心重分技术。

第二章 预备知识

本章的第一节首先会介绍必要的点集拓扑知识，接着给出微分流形相关的基本概念。第二节主要介绍曲面的几何，包括活动标架、微分形式、曲面结构方程、测地曲率等。本章主要参照《微分几何》^[16]和《整体微分几何初步》^[17]的内容。

2.1 微分流形的基本概念

定义： 设 X 为一个集合，称其幂集的一个子集 $\mathcal{T}_X \subset 2^X := \{A \mid A \subset X\}$ 为 X 的一个拓扑，若其满足以下三条：

- I. $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$;
- II. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}_X, \forall A \subset \mathcal{T}_X$;
- III. $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}_X, \forall \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{T}_X, |\mathcal{A}| < \infty$.

称结构 (X, \mathcal{T}_X) 为一个拓扑空间。称 U 为 X 的开集，若 U 是 \mathcal{T}_X 的元素，记作 $U \subset X$ 。称 F 为 X 的闭集，若 F 是开集的补集，记作 $F \subset X$ 。称 X 的子集 W （可以是 X 本身）为紧致集，若 W 的任意开覆盖都存在有限子覆盖。

定义： 设 (X, \mathcal{T}_X) 为一个拓扑空间， A 是 X 的一个子集，则称集合

$$\partial A := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{T}_X : x \in U, \text{ s.t. } U \cap A \neq \emptyset, (X \setminus U) \cap A \neq \emptyset\}$$

为 A 的边界。若 $\partial A = \emptyset$ ，则称 A 是无边的。称 $\bar{A} := A \cup \partial A$ 为 A 的闭包。

定义： 设 (X, \mathcal{T}_X) 为一个拓扑空间， A 是 X 的一个子集，则可定义 A 上的一个拓扑

$$\mathcal{T}_{ACX} := \mathcal{T}_X \cap A := \{T \cap A \mid T \in \mathcal{T}_X\},$$

称之为 X 限制在 A 上的子拓扑或相对拓扑。可见 \mathcal{T}_{ACX} 确为 A 的一个拓扑，并且它是由 \mathcal{T}_X 导出的拓扑。

定义： 设 X 为一个集合，称其幂集的一个子集 $\mathcal{B}_X \subset 2^X := \{A \mid A \subset X\}$ 为 X 的一个拓扑基，若其满足以下两条：

- I. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}_X, x \in B$;
- II. 若 $x \in B_1 \cap B_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_X$ ，则 $\exists B_3 \in \mathcal{B}_X, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ 。

显然拓扑基可以导出一个相对应的拓扑 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_X}$ 如下

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}_X} := \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_X \right\}. \quad (10)$$

定义： 设 (X, \mathcal{T}_X) 为一个拓扑空间，若其存在一个至多只有可数个元素的拓扑基 \mathcal{B}_X ，并且使得 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_X} = \mathcal{T}_X$ ，则称 X 具有**可数拓扑基**。

定义： 设 (X, \mathcal{T}_X) 为一个拓扑空间，若对于 X 上任意相异的两点 $x_1 \neq x_2 \in X$ ，存在两个无交的开集 U_1, U_2 ，分别包含这两点，则称 X 是一个 **T_2 拓扑空间**或**Hausdorff拓扑空间**。

定义： 设 (X, \mathcal{T}_X) 为一个拓扑空间，称子集 $A \subset X$ 是**连通的**，若不存在两个无交的开集 U_1, U_2 ，使 A 成为它们的并集。若子集 A 还是 X 的开集，则称 A 为一个**开区域**，简称**区域**。

定义： 设 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ 为两个拓扑空间，称映射 $f : X \rightarrow Y$ 为**连续映射**，若对一切 Y 中的开集 $V \subset Y$ 都有其原象 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。这里 $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ 称为 V 的**原象**。

定义： 设 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ 为两个拓扑空间，若存在它们之间存在一个既单又满的连续映射 $f : X \rightarrow Y$ ，且其逆映射 f^{-1} 也是连续的，则称 f 是 X 和 Y 之间的**同胚映射**，并称 X 和 Y 是**同胚的**，记作 $X \cong Y$ ，或 $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ 。

定义： 设 M 为一个具有可数拓扑基的 T_2 拓扑空间。若对任意 $p \in M$ ，存在包含点 p 的与 \mathbb{R}^m 中某个开集同胚的 M 的开集 U_{α_p} ，即存在一同胚映射

$$\varphi_{\alpha_p} : U_{\alpha_p} \xrightarrow{\cong} \varphi_{\alpha_p}(U_{\alpha_p}) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m,$$

则称 M 是一个 **m 维拓扑流形**，称 $(U_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_p})$ 为 p 的一个**坐标图**，称 M 的一个由坐标图构成的开覆盖 $\mathcal{U} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in A}$ （其中 $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} = M$ ）为 M 的**坐标图册**，其中 A 为**指标集**。

通常情况下假定 $\varphi(U)$ 是连通的，即假定 $\varphi(U)$ 是一个**区域**。

$$\begin{array}{ccc} p & & \\ \cap & & \\ U_{\alpha_p} & \xrightarrow[\text{open}]{} & M \\ \parallel \varphi_{\alpha_p} \downarrow & & \\ \varphi_{\alpha_p}(U_{\alpha_p}) & \xrightarrow[\text{open}]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

定义： M 为一个 **m 维拓扑流形**，考虑流形上的两个坐标图 $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ 以及 $(U_{\beta}, \varphi_{\beta})$ ，其中 U_{α}, U_{β} 满足 $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ 。若复合映射

$$\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} |_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})} : \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}),$$

是 C^∞ 可微的，则称坐标图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 是 C^∞ 相容的。

$$\begin{array}{ccc}
 & U_\alpha \cap U_\beta & \\
 \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \swarrow & & \searrow \varphi_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\
 \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}} & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)
 \end{array}$$

定义： M 为一个 m 维拓扑流形，若存在一个 M 的坐标图册 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ，对任意一对满足 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 的坐标图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}$ 均为 C^∞ 相容，则称结构 (M, \mathcal{U}) 是一个 m 维 C^∞ 微分流形。

定义： M 为一个 m 维 C^∞ 微分流形，映射 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称之为 M 上的一个 C^∞ 向量值映射，若对于任意坐标图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{U}$ ，都有复合映射

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

为 C^∞ 映射。

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \subset & \xrightarrow{\text{open}} & M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \\
 \parallel \varphi_\alpha \downarrow & & \nearrow f \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
 \varphi_\alpha(U_\alpha) & &
 \end{array}$$

定义： M 是一个 m 维 C^∞ 微分流形，映射 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 M 上的一个 C^∞ 向量值映射，称 f 为从 M 到欧式空间 \mathbb{R}^n 的一个 C^∞ 嵌入，若 f 满足以下两个条件：

- I. f 是单射；
- II. $(M, \mathcal{T}_M) \cong (f(M), \mathcal{T}_{f(M) \subset \mathbb{R}^n})$ 。

本文将 C^∞ 嵌入简称嵌入。对于嵌入欧式空间的流形 M ，往往将其嵌入的象 $f(M)$ 看作流形本身。

注记： 可嵌入到 \mathbb{R}^{m+1} 之中的 m 维 C^∞ 微分流形是存在的。例如 m 维流形

$$M := \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} x^i = 0 \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

即自然地嵌入在 \mathbb{R}^{m+1} 中。

Whitney嵌入定理指出，任何 m 维 C^∞ 流形 M 均可嵌入到 \mathbb{R}^{2m} 之中。换言之，只要欧式空间的维数足够大， C^∞ 流形总能嵌入其中。针对紧2维 C^∞ 流形 M ， M 可嵌入 \mathbb{R}^3 的充要条件是 M 可定向。

定义： M 是一个2维 C^∞ 微分流形，且存在嵌入映射 $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ，则记 $\Sigma := f(M)$ ，称 f （或 Σ ）是一张正则曲面。

选定 M 上的一个坐标图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 记 $\mathbf{r} := f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3$, 同时记 $S := \mathbf{r}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, 称 \mathbf{r} (或 S) 是一块正则曲面片。

称 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 为曲面片 S 的参数域, 称 $\mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ 为曲面片 S 的坐标参数。

记 $\mathbf{r}_i(\mathbf{x}) := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} |_{\mathbf{x}}$, 定义线性空间

$$T_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}S := \text{span} \{ \mathbf{r}_i(\mathbf{x}) \}_{i=1,2} \subset \mathbb{R}^3,$$

称为 S 在 $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 处的切平面。称切平面的元素为切向量, 通常记 $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 处的切向量为 $X_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}$ 或 $Y_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}$ 等。

在不产生歧义的情况下, 往往简记 $\mathcal{D} := \varphi_\alpha(U_\alpha)$ 。一般地, 如果要同时考虑多块曲面片, 则可记 $\mathcal{D}_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$, 记 $\mathbf{r}_\alpha := f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathcal{D}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$, 以及记 $S_\alpha := \mathbf{r}_\alpha(\mathcal{D}_\alpha)$ 。

$$\begin{array}{ccccc} U_\alpha & \xrightarrow{\text{open}} & M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \mathbb{R} \varphi_\alpha & & & \nearrow \mathbf{r} & \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\text{open}} & & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

定义: 给定一正则曲面片 $\mathbf{r} : \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S$, 定义 S 上的切丛为 S 上所有切平面的集合, 即

$$TS := \coprod_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} T_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}S \subset \coprod_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \mathbb{R}^3.$$

如下定义投影映射 π

$$\begin{array}{ccc} \pi & : & TS \longrightarrow S \\ & & \cup \\ & & T_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}S \\ & & \cup \\ & & X_{\mathbf{r}(\mathbf{x})} \longmapsto \mathbf{r}(\mathbf{x}) \end{array}$$

若映射 $X : S \rightarrow TS$ 满足 $\pi \circ X = \text{id}_S$, 则称 X 为 S 上的向量场。特别地, 若复合映射 $X \circ \mathbf{r} : \mathcal{D} \rightarrow TS$ 是 C^∞ 的, 则称 X 为 S 上的 C^∞ 向量场。

2.2 曲面的几何

定义: 设 $\mathbf{r} : \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S$ 为一块正则曲面片, 考虑 S 上的 C^∞ 向量场 $\tilde{\mathbf{e}}_i, i = 1, 2$ 。记 $\mathbf{e}_i := \tilde{\mathbf{e}}_i \circ \mathbf{r}, i = 1, 2$, 若其对任意的任意的 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, 都有 $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_i^j$, 则再定义映射 \mathbf{e}_3 如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{e}_3(\mathbf{x}) &= \mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{e}_2(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

并称 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为 S 的一个正交活动标架场, 简称正交活动标架。

定义： 设 Σ 是一张正则曲面， $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 Σ 的一个开覆盖，其中 S_α 均为正则曲面片。如果每个正则曲面片上都存在一组正交活动标架 $\{\mathbf{r}_\alpha; \mathbf{e}_{1\alpha}, \mathbf{e}_{2\alpha}, \mathbf{e}_{3\alpha}\}$ ，使得对于任意两个正则曲面片 S_α, S_β ，只要它们相交不为空集 $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ ，则对它们的交集集中的任何一点 $\mathbf{y} \in S_\alpha \cap S_\beta$ ，都有

$$\tilde{\mathbf{e}}_{3\alpha}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{e}}_{3\beta}(\mathbf{y}),$$

称满足此条件的正则曲面 Σ 是**可定向的**。否则，称其为**不可定向的**。

定义： 由于 $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{e}_j(\mathbf{x})$ 是正交的，从而它们线性无关，所以 $\{\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\}_{i=1,2}$ 和 $\{\mathbf{r}_i(\mathbf{x})\}_{i=1,2}$ 是切平面 $T_{\mathbf{r}(\mathbf{x})}S$ 的两组基，它们可以互相表出，即存在可逆矩阵 $\mathbf{A} := (a_{ij})_{2 \times 2}$ 使得 $\mathbf{r}_i = a_{ij}\mathbf{e}_j, i = 1, 2$ 。

定义微分形式

$$\omega_j := \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_j \rangle, j = 1, 2,$$

事实上 ω_j 即为 $d\mathbf{r}$ 在标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的分量大小，即

$$d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^2 \omega_j \mathbf{e}_j. \quad (11)$$

因为 $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i dx^i$ ，所以 ω_i 也可表达为

$$\omega_j = dx^i \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{e}_j \rangle = a_{ij} dx^i. \quad (12)$$

定义

$$I := \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle,$$

称之为曲面片 S 的**第一基本形式**。不难得到

$$I := \langle d\mathbf{r}, \omega_j \mathbf{e}_j \rangle = \omega_j \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{j=1}^2 \omega_j^2. \quad (13)$$

还可定义微分形式

$$\omega_{\alpha\beta} := \langle d\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle, \alpha = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3.$$

同理 $\omega_{\alpha\beta}$ 即为 $d\mathbf{e}_\alpha$ 在标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的分量大小，即

$$d\mathbf{e}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \omega_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta. \quad (14)$$

对 $\langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta$ 两边微分，得到

$$\langle d\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = -\langle \mathbf{e}_\alpha, d\mathbf{e}_\beta \rangle = -\langle d\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha \rangle, \quad (15)$$

说明矩阵 $(\omega_{\alpha\beta})_{3 \times 3}$ 是反对称的，即 $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ 。特别地， $\omega_{\alpha\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, 3$ 。

记 $\mathbf{e}_{\alpha i} := \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^i}, \alpha = 1, 2, 3, i = 1, 2$ ，由于 $d\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{\alpha i} dx^i$ ，所以

$$\omega_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{e}_{\alpha i} dx^i, \mathbf{e}_\beta \rangle = \langle \mathbf{e}_{\alpha i}, \mathbf{e}_\beta \rangle dx^i, \quad (16)$$

即 $\omega_{\alpha\beta}$ 可由 dx^i 线性表出。另一方面，由 $\omega_j = a_{ij}dx^i$ 以及 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{2 \times 2}$ 是可逆矩阵，得到 dx^i 可由 ω_j 线性表出。从而得到 $\omega_{\alpha\beta}$ 可由 ω_j 线性表出，故可定义系数矩阵 $\mathbf{B} := (h_{ij})_{2 \times 2}$ 如下

$$\omega_{i3} = h_{ij}\omega_j, i = 1, 2.$$

不难发现 $\det(\mathbf{B})$ 即为通常意义下的Gauss曲率 K 。

定理： 第一基本形式 I 与正交活动标架的选取无关。

证明：

设原正交活动标架为 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。另设一组正交活动标架为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 = \pm (-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) \end{cases}, \quad (17)$$

在其等式两边作用 $\langle d\mathbf{r}, \cdot \rangle$ ，得到

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2 \\ \bar{\omega}_2 = \pm (-\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2) \end{cases}, \quad (18)$$

从而得到

$$\bar{I} = \sum_{j=1}^2 \bar{\omega}_j^2 = \sum_{j=1}^2 \omega_j^2 = I. \quad (19)$$

□

定理： $d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\sigma} \wedge \omega_{\sigma\beta}, \alpha = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3$ 。

证明：

考虑 dde_α 。事实上全体微分形式和外导数运算构成一个上链复形（de Rham复形），所以固然有 $dde_\alpha = 0$ 。另一方面， dde_α 可进行如下演算

$$\begin{aligned} 0 &= dde_\alpha = d(de_\alpha) = d(\omega_{\alpha\beta}e_\beta) \\ &= (d\omega_{\alpha\beta})e_\beta - \omega_{\alpha\beta} \wedge de_\beta \\ &= (d\omega_{\alpha\beta})e_\beta - \omega_{\alpha\beta} \wedge (\omega_{\beta\sigma}e_\sigma) \\ &= (d\omega_{\alpha\beta})e_\beta - \omega_{\alpha\sigma} \wedge \omega_{\sigma\beta}e_\beta \\ &= (d\omega_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\sigma} \wedge \omega_{\sigma\beta})e_\beta. \end{aligned} \quad (20)$$

从而得到

$$d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\sigma} \wedge \omega_{\sigma\beta}, \alpha = 1, 2, 3, \beta = 1, 2, 3, \quad (21)$$

上述方程组统称为曲面的结构方程。特别地，取 $\alpha = 1, \beta = 2$ ，结合 $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ ，得到

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \quad (22)$$

该方程称为Gauss方程。

□

定义: 定义二次微分形式

$$dA := \omega_1 \wedge \omega_2,$$

称之为曲面的面积元。

推论: $-d\omega_{12} = KdA$ 。

证明:

由Gauss方程、 $(\omega_{\alpha\beta})_{3 \times 3}$ 的反对称性、 $\omega_{i3} = h_{ij}\omega_j$ 以及外积的规定 $\omega_j \wedge \omega_j = 0$ 可以得到

$$\begin{aligned} -d\omega_{12} &= -\omega_{13} \wedge \omega_{32} = \omega_{13} \wedge \omega_{23} \\ &= (h_{1j}\omega_j) \wedge (h_{2k}\omega_k) \\ &= (h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{12}h_{21}\omega_2 \wedge \omega_1) \\ &= (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= \det(\mathbf{B})\omega_1 \wedge \omega_2 = K\omega_1 \wedge \omega_2 = KdA. \end{aligned} \quad (23)$$

□

定理: $-d\omega_{12}$ 与同法向的正交活动标架的选取无关。

证明:

设原正交活动标架为 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。另设一组正交活动标架为

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \overline{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{cases}, \quad (24)$$

在其等式两边作用 $\langle d\mathbf{e}_3, \cdot \rangle$, 得到

$$\begin{cases} \overline{\omega}_{31} = \cos \theta \omega_{31} + \sin \theta \omega_{32} \\ \overline{\omega}_{32} = -\sin \theta \omega_{31} + \cos \theta \omega_{32} \end{cases}, \quad (25)$$

从而得到

$$-d\omega_{12} = \overline{\omega}_{13} \wedge \overline{\omega}_{32} = -\overline{\omega}_{31} \wedge \overline{\omega}_{32} = -\omega_{31} \wedge \omega_{32} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -d\omega_{12}. \quad (26)$$

□

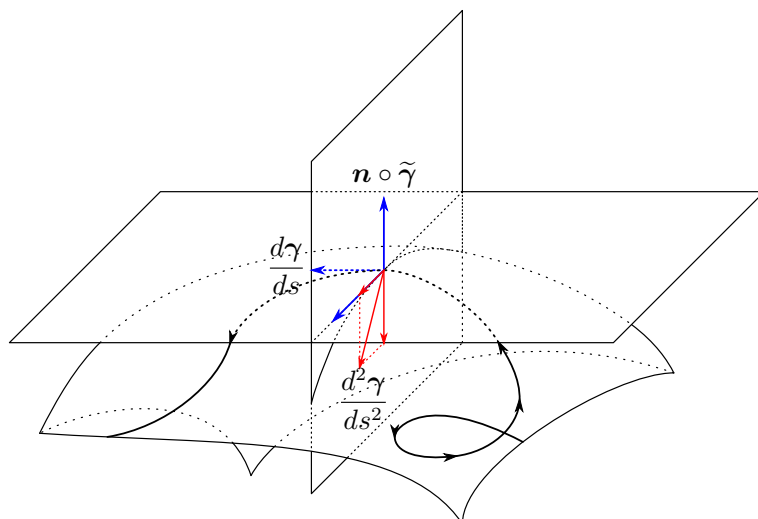


图 2: 测地曲率

定义: 给定一块正则曲面片 $\mathbf{r} : \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S$, 以及一个 C^∞ 映射 $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \tilde{\gamma}(s) &= \mathbf{x}(s).\end{aligned}$$

定义

$$\gamma := \mathbf{r} \circ \tilde{\gamma},$$

事实上 γ 表示了曲面片 S 上的一根曲线。同时, 要求映射 γ 满足

$$\left| \frac{d\gamma}{ds} \right| \equiv 1,$$

即要求该曲线是弧长参数的。

设曲面片 S 上的法向量场为 $\mathbf{n} : \mathcal{D} \rightarrow S$, 曲面片 S 沿着曲线 γ 的测地曲率 $k_g(s_0), \forall s_0 \in I$ 定义为

$$k_g(s_0) := \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2} \Big|_{s_0}, (\mathbf{n} \circ \tilde{\gamma}) \Big|_{s_0} \wedge \frac{d\gamma}{ds} \Big|_{s_0} \right\rangle.$$

由图2可见, 测地曲率 $k_g(s_0)$ 事实上刻画了曲线 γ 在 $\gamma(s_0)$ 处切向的扭曲程度。

注记: 本文中的所有曲线 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, 不论是映到平面还是空间, 不论是 C^∞ 的还是分段 C^∞ 的, 不论是否封闭, 不论是否作为某个区域的边界, 均要求是可求长的, 也即它们均要满足 Lipschitz 连续条件

$$\exists K > 0 : |\gamma(a) - \gamma(b)| \leq K |a - b|, \forall a, b \in I.$$

可以发现, 这种情况下的分段 C^∞ 曲线中的任何不连续点的左右导数一定均存在 (包括无穷大)。

第三章 局部Gauss-Bonnet定理

本章的第一节主要介绍同伦提升性质有关内容，证明办法基本是点集拓扑的，证明思路主要参照《Algebraic Topology》^[16]。第二节将介绍旋转指标定理，平面曲线版本的证明用到了道路同伦的知识以及第一节同伦提升性质，分段平面曲线版本的证明需要对曲线不光滑点进行平滑化操作，空间曲线版本的证明则是平面版本的自然推广。第三节会证明局部Gauss-Bonnet定理，主要涉及到Gauss方程（的推论）、Stokes公式、测地曲率的计算以及第二节的旋转指标定理。本章后两节的内容主要参照《微分几何》^[16]和《整体微分几何初步》^[17]。

3.1 同伦提升性质

定义： 给定两个拓扑空间 E, B 以及一个连续满射 $p : E \twoheadrightarrow B$ ，称结构 (E, p, B) （或 E ）为一个覆叠空间，若存在一个 B 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 以及一个离散拓扑空间 F ，对任意的 $\alpha \in \mathcal{A}$ ，都存在同胚映射 $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U_\alpha)$ 。

引理(有界闭版本焊接引理)： 设 X, Y 为两个拓扑空间， $\{f_i : F_i \rightarrow Y\}_{i=1}^n$ 为一族连续映射，其中 F_i 为 X 中的闭集，并且满足对于任意的 $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ ，都有 $f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$ ，则映射

$$f : \bigcup_{i=1}^n F_i \rightarrow Y$$

$$f(x) = f_i(x), x \in F_i$$

也是连续映射。

证明：

首先说明，一个映射是连续映射当且仅当任意闭集的原象仍是闭集，此论断的本质是其补集的原象等于其原象的补集。

所以，考虑任意闭集 $C \subset Y$ ，发现

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C \cap f_i(F_i)), \quad (27)$$

由于 $C \cap f_i(F_i)$ 是闭集，且 f_i 是连续函数，所以 $f_i^{-1}(C \cap f_i(F_i))$ 是闭集，自然 $\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C \cap f_i(F_i))$ 也是闭集，即 $f^{-1}(C) \subset X$ ，所以命题成立。

□

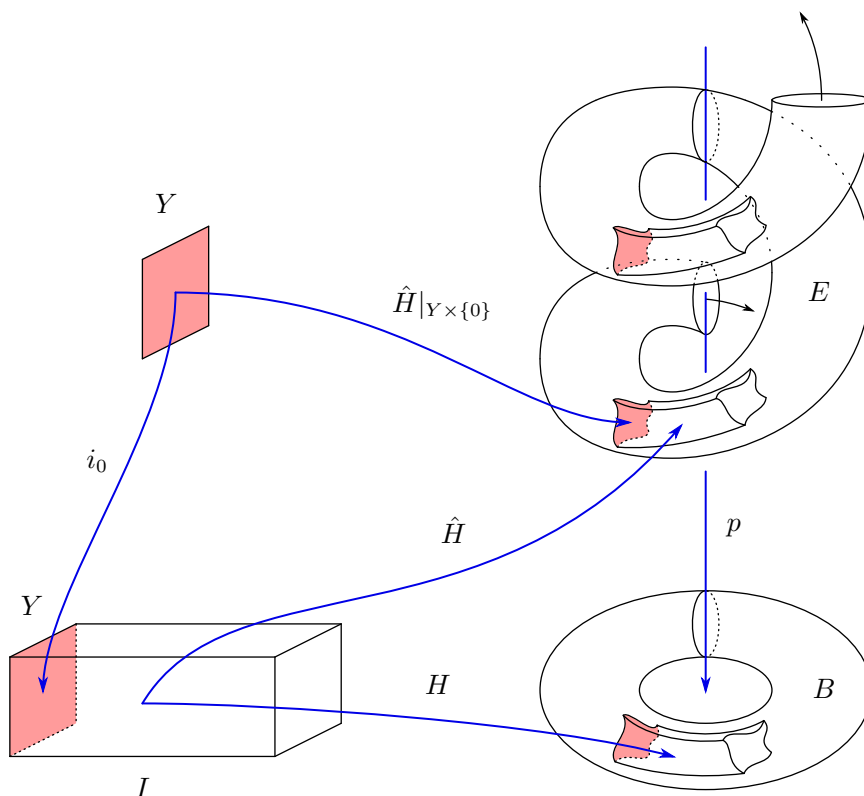


图 3: 同伦提升性质

引理(任意开版本焊接引理): 设 X, Y 为两个拓扑空间, $\{f_\alpha : U_\alpha \rightarrow Y\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 为一族连续映射, 其中 U_α 为 X 中的开集, 并且满足对于任意的 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 都有 $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, 则映射

$$f : \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \rightarrow Y$$

$$f(x) = f_\alpha(x), x \in U_\alpha$$

也是连续映射。

证明:

该证明和有界闭版本的焊接引理的原理类似。

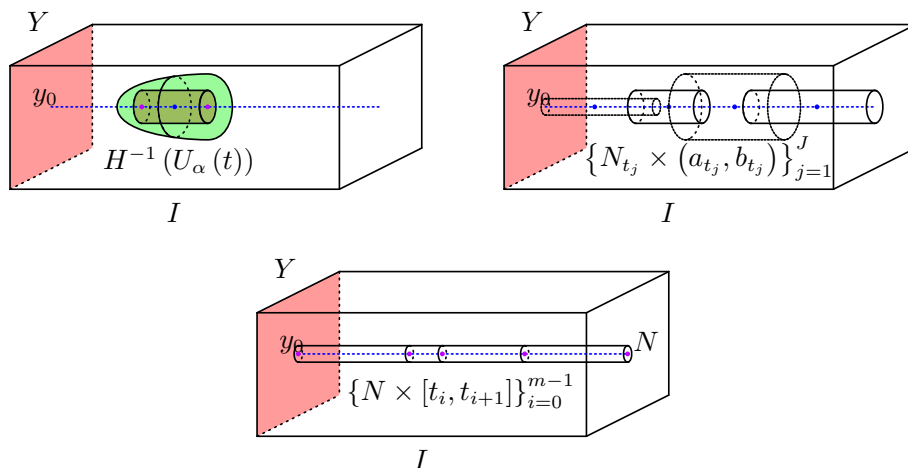
考虑任意开集 $V \subset Y$, 发现

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha^{-1}(V \cap f_\alpha(F_\alpha)), \tag{28}$$

由于 $V \cap f_\alpha(F_\alpha)$ 是开集, 且 f_α 是连续函数, 所以 $f_\alpha^{-1}(V \cap f_\alpha(F_\alpha))$ 是开集, 自然 $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha^{-1}(V \cap f_\alpha(F_\alpha))$ 也是开集, 即 $f^{-1}(V) \underset{\text{open}}{\subset} X$, 所以命题成立。

□

定理(同伦提升性质): 如图3所示, (E, p, B) 为一个覆叠空间, 对于任意的拓扑空间 Y , 给定 Y 和 B 之间的连续同伦映射 $H : Y \times I \rightarrow B$ 及其连续同伦提升的初始值 $\hat{H}|_{Y \times \{0\}} : Y \rightarrow E$, 则存在唯一的连续同


 图 4: 构造 $\{y_0\} \times I$ 的覆盖

伦提升 $\hat{H} : Y \times I \rightarrow E$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\hat{H}|_{Y \times \{0\}}} & E \\
 \downarrow i_0 & \searrow \exists! \hat{H} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

其中 $i_0 : Y \hookrightarrow Y \times I$ 是标准含入映射, 即

$$\begin{aligned}
 i_0 : Y &\longrightarrow Y \times I \\
 i_0(y) &= (y, 0).
 \end{aligned}$$

证明:

步骤1:

如图4所示, 固定某个 $y_0 \in Y$, 可知对任何 $(y_0, t) \in \{y_0\} \times I$, 存在 B 的开覆盖中的一个开集 $U_\alpha(t) \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, 使得 $H(y_0, t) \in U_\alpha(t)$ 。

因为 $U_\alpha(t) \subset B$ 且 H 是连续的, 所以有 $(y_0, t) \in H^{-1}(U_\alpha(t)) \subset Y \times I$, 从而存在 (y_0, t) 处的拓扑基 (是个柱体) $N_t \times (a_t, b_t) \subset H^{-1}(U_\alpha(t))$, 其中 $N_t \subset Y$ 。

从而, 以上得到了一组 $\{y_0\} \times I$ 的开覆盖 $\{N_t \times (a_t, b_t)\}_{t \in I}$ 。

步骤2:

因为 $\{y_0\} \times I \cong I$, 所以 $\{y_0\} \times I$ 是紧致的, 从而它存在有限子覆盖 $\{N_{t_j} \times (a_{t_j}, b_{t_j})\}_{j=1}^J$ 。现取 $N := \bigcap_{j=1}^J N_{t_j}$, 并自然能够取 I 的一组分割 $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$, 使得对于任意的 $N \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$, 都存在某个 $N_{t_{j_i}} \times (a_{t_{j_i}}, b_{t_{j_i}})$, 使得 $N \times [t_i, t_{i+1}] \subset N_{t_{j_i}} \times (a_{t_{j_i}}, b_{t_{j_i}})$, 所以也有

$$H(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset H(N_{t_{j_i}} \times (a_{t_{j_i}}, b_{t_{j_i}})) \subset U_\alpha(t_{j_i}),$$

为了方便, 以下记 $U_i := U_\alpha(t_{j_i})$ 。

以下考虑在每个 $N \times [t_i, t_{i+1}]$ 上构造连续映射 $\hat{H}|_{N \times [t_i, t_{i+1}]}$, 并且相邻两段映射在接缝处的值要相等。

步骤3:

在 $i = 0$ 处, 由于 $\hat{H}|_{Y \times \{0\}}$ 已经给定, 故只能取 $\hat{H}|_{N \times \{t_0\}} := (\hat{H}|_{Y \times \{0\}})|_{N \times \{t_0\}}$ 。

因为 $H(N \times [t_0, t_1]) \subset U_0$, 并且 (E, p, B) 为一个覆盖空间, 所以存在唯一的 $\hat{U}_0 \cong U_0$, 其中 $\hat{U}_0 = U_0 \times \{f_0\} \subset U_0 \times F \cong p^{-1}(U_0)$, 使得 $\hat{H}|_{N \times \{t_0\}}(y_0, t_0) \subset \hat{U}_0$ 。令 $p_0^{-1} := (p|_{\hat{U}_0})^{-1} : U_0 \xrightarrow{\cong} \hat{U}_0$, 并构造 $\hat{H}|_{N \times [t_0, t_1]} := p_0^{-1} \circ H|_{N \times [t_0, t_1]}$ 。

步骤4:

假设 $i = 0, \dots, i-1$ 都已经构造完成, 且接缝处值相等, 那么在 $i = i$ 处, 由于 $H(N \times \{t_i\}) \subset U_{i-1} \cap U_i$, 所以 $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$, 从而有

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq p_{i-1}^{-1}(H(y_0, t_i)) \\ &\subset p_{i-1}^{-1}(H(y_0, t_i)) \cap p_{i-1}^{-1}(U_{i-1} \cap U_i) \\ &\subset p_{i-1}^{-1}(H(y_0, t_i)) \cap p^{-1}(U_{i-1} \cap U_i) \\ &\subset p_{i-1}^{-1}(H(y_0, t_i)) \cap p^{-1}(U_i), \end{aligned} \quad (29)$$

即得到 $p_{i-1}^{-1}(H(y_0, t_i)) \cap p^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ 。故存在唯一的 $\hat{U}_i \cong U_i$, 使得 $p_{i-1}^{-1}(H(y_0, t_i)) \subset \hat{U}_i$ 。

将 N 替换为 $N \cap \pi((p_{i-1}^{-1} \circ H)^{-1}(\hat{U}_i))$, 其中投影映射 π 定义为

$$\begin{aligned} \pi : Y \times I &\longrightarrow Y \\ \pi(y, t) &= y_0. \end{aligned}$$

可见替换后的 N 仍为包含 y_0 的 Y 一个开集。从而令 $p_i^{-1} := (p|_{\hat{U}_i})^{-1}$, 并构造 $\hat{H}|_{N \times [t_i, t_{i+1}]} := p_i^{-1} \circ H|_{N \times [t_i, t_{i+1}]}$ 。

步骤5:

以下说明 $(\hat{H}|_{N \times [t_i, t_{i+1}]})|_{N \times \{t_i\}} = (\hat{H}|_{N \times [t_{i-1}, t_i]})|_{N \times \{t_i\}}$, 即 $p_i^{-1} \circ H|_{N \times \{t_i\}} = p_{i-1}^{-1} \circ H|_{N \times \{t_i\}}$ 。

对于任意的 $(y, t_i) \in N \times \{t_i\}$, 由 \hat{U}_i 的构造可得 $p_{i-1}^{-1} \circ H(y, t_i) \in \hat{U}_i$, 又由于 $p_i^{-1} : U_i \xrightarrow{\cong} \hat{U}_i$, 所以显然也有 $p_i^{-1} \circ H(y, t_i) \in \hat{U}_i$ 。

因为 $p|_{\hat{U}_i} : \hat{U}_i \xrightarrow{\cong} U_i$ 是同构映射, 所以它是单射, 所以可由

$$p|_{\hat{U}_i}(p_{i-1}^{-1} \circ H(y, t_i)) = p|_{\hat{U}_i}(p_i^{-1} \circ H(y, t_i)) = H(y, t_i) \quad (30)$$

得到 $p_{i-1}^{-1} \circ H(y, t_i) = p_i^{-1} \circ H(y, t_i)$ 。再由 (y, t_i) 的任意性可得 $p_{i-1}^{-1} \circ H|_{N \times \{t_i\}} = p_i^{-1} \circ H|_{N \times \{t_i\}}$ 成立。

步骤6:

因此可利用焊接引理的有限闭版本, 得到连续映射 $\hat{H}|_{N_{y_0} \times I}$ 。至此我们需要注明 $N = N_{y_0}$, 因为可以通过上述构造方法得到任何在 $\{y_0\} \times I, y_0 \in Y$ 附近的连续映射, 也就是事实上我们得到了一族连续映射 $\{\hat{H}|_{N_{y_0} \times I} \mid y_0 \in Y\}$ 。

步骤7:

最后我们再把这族映射焊接起来。

从上述映射的构造方法可以看出每个 \hat{U}_i 的选取是唯一的, 故对于任何两个定义域有交集的映射 $\hat{H}|_{N_{y_0} \times I}, \hat{H}|_{N_{y_1} \times I}$, 但凡 $y \in N_{y_0}$, 它们限制在 $\{y\} \times I, \forall y \in Y$ 上的值必相等, 即

$$(\hat{H}|_{N_{y_0} \times I})|_{\{y\} \times I} = (\hat{H}|_{N_{y_1} \times I})|_{\{y\} \times I}, \forall y_0, y_1 \in Y : N_{y_0} \cap N_{y_1} \neq \emptyset, \forall y \in N_{y_0} \cap N_{y_1}, \quad (31)$$

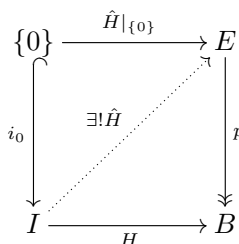
从而就有

$$\left(\hat{H}|_{N_{y_0} \times I}\right)|_{(N_{y_0} \cap N_{y_1}) \times I} = \left(\hat{H}|_{N_{y_1} \times I}\right)|_{(N_{y_0} \cap N_{y_1}) \times I}, \forall y_0, y_1 \in Y : N_{y_0} \cap N_{y_1} \neq \emptyset. \quad (32)$$

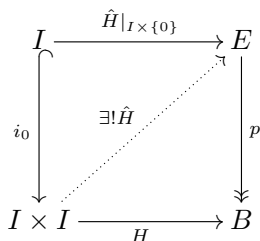
最后，由焊接引理的任意开版本，得到整个连续映射 \hat{H} ，并且它是唯一的。

□

推论(唯一提升引理): (E, p, B) 为一个覆盖空间，给定连续道路映射 $H : I \rightarrow B$ 及其连续道路提升的初始值 $\hat{H}|_{\{0\}} : Y \rightarrow E$ ，则存在唯一的连续道路提升 $\hat{H} : I \rightarrow E$ ，使得下图交换



推论(同伦提升引理): (E, p, B) 为一个覆盖空间，给定连续道路同伦映射 $H : I \times I \rightarrow B$ 及其连续道路同伦提升的初始值 $\hat{H}|_{I \times \{0\}} : Y \rightarrow E$ ，则存在唯一的连续道路同伦提升 $\hat{H} : I \times I \rightarrow E$ ，使得下图交换



3.2 旋转指标定理

定义: 定义单位圆周为

$$S^1 := \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)\},$$

并且 S^1 可以继承 \mathbb{R}^2 的相对拓扑而构成一个拓扑空间。

定义连续映射 $w_n, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} w_n : I &\rightarrow S^1 \\ w_n(s) &= (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns), \end{aligned}$$

称为**标准环路**。

类似地，定义连续映射 $\hat{w}_n, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \hat{w}_n : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ \hat{w}_n(s) &= ns, \end{aligned}$$

称为标准道路。

定义: 定义连续满射 p

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ p(x) &= (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x). \end{aligned}$$

容易验证 (\mathbb{R}, p, S^1) 构成一个覆叠空间, 称之为 S^1 的万有覆叠。
同时可看出关系

$$w_n = p \circ \hat{w}_n \quad (33)$$

成立。

定义(C^∞ 简单闭曲线): $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 \mathbb{R}^n 上的 C^∞ 映射, 称其为一条 C^∞ 简单闭曲线, 若其满足以下两个条件:

- I. γ 是简单的, 即 $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_2), \forall s_1 \neq s_2 \in I$;
- II. γ 是封闭的, 即 $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1), \forall k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ 。

定理(平面的旋转指标定理): 平面上任一弧长参数的 C^∞ 简单闭曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, 记其切映射为

$$\begin{aligned} f: I &\longrightarrow S^1 \\ f(s_0) &= \left. \frac{d\gamma}{ds} \right|_{s_0}, \end{aligned}$$

则存在唯一的 C^∞ 映射 $l: I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$f(s) = (\cos 2\pi l(s) \quad \sin 2\pi l(s)), \quad (34)$$

并且

$$\int_I dl(s) = 1. \quad (35)$$

证明:

通过平移变换, 可使曲线 $\gamma(I)$ 与 $y = 0$ 相切, 并且整条曲线位于其上方。这点是可以做到的, 因为考虑点集 $\gamma(I)$ 中各元素的第二个分量构成的集合是个有界闭集, 所以集合的下确界就是集合的最小值, 所以只用将曲线向下平移最小值即可。通过曲线的重新参数化, 可使 γ 和 $y = 0$ 的切点作为 $\gamma(0)$, 且使 $f(0) = (1, 0)$ 。

在覆叠空间 (\mathbb{R}, p, S^1) 上使用唯一提升引理, 若给定 f 的提升的初始值为 $\hat{f}(0) = 0$, 则可得到唯一的 f 的道路提升 $\hat{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $f = p \circ \hat{f}$ 。根据题意, 只能取 $l := \hat{f}$ 。

以下说明 α 是 C^∞ 映射以及 $\int_I dl(s) = 1$ 成立。因为 (\mathbb{R}, p, S^1) 是一个覆叠空间, 所以 p 是局部同胚的, 同时 f 和 p 均为 C^∞ 映射, 从而 l 是 C^∞ 映射。从而利用Newton-Leibniz公式得到

$$\int_I dl(s) = l(1) - l(0) = l(1). \quad (36)$$

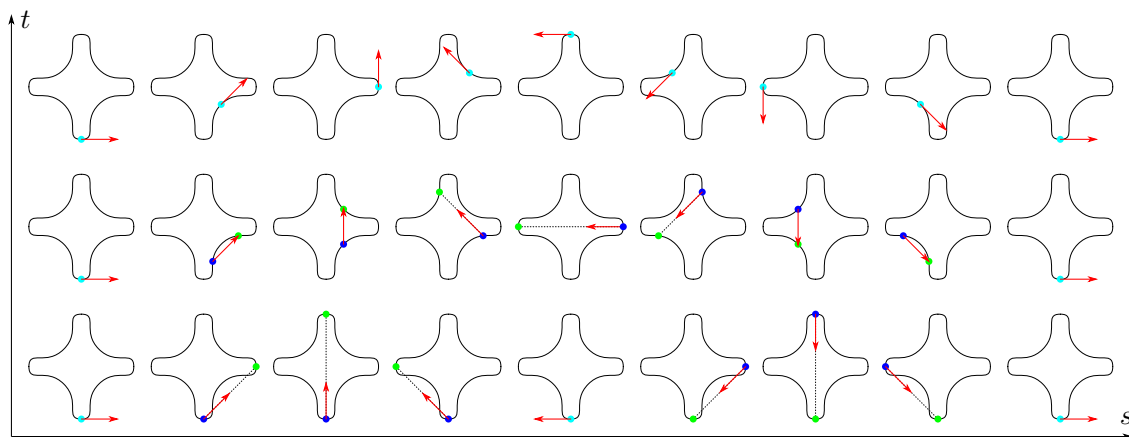


图 5: 同伦 h_1

以下构造两组同伦同伦映射

$$h_1 : I \times I \longrightarrow S^1$$

$$h_1(s, t) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{\gamma((2-t)s) - \gamma(ts)}{|\gamma((2-t)s) - \gamma(ts)|} & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\gamma(ts - t + 1) - \gamma((2-t)s + t - 1)}{|\gamma(ts - t + 1) - \gamma((2-t)s + t - 1)|} & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} & , 0 \leq t < 1 \\ f(s) & , t = 1 \end{cases} \quad (37)$$

以及

$$h_2 : I \times I \longrightarrow S^1$$

$$h_2(s, t) = \frac{(1-t)w_1 + th_1(s, 0)}{|(1-t)w_1 + th_1(s, 0)|} \quad (38)$$

图5给出了 h_1 的几何意义。可以验证 h_1 和 h_2 均是良定义的且均是连续的。从而，通过道路同伦的传递性可知 f 和 w_1 道路同伦，即

$$f \simeq_p w_1, \quad (39)$$

再利用同伦提升引理，得到

$$\hat{f} \simeq_p \hat{w}_1, \quad (40)$$

从而由道路同伦的定义有

$$l(1) = \hat{f}(1) = \hat{w}_1(1), \quad (41)$$

从而得到

$$\int_I dl(s) = 1. \quad (42)$$

□

定义(分段 C^∞ 简单闭曲线): $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 \mathbb{R}^n 上的 C^∞ 映射, 称其为一条分段 C^∞ 简单闭曲线, 若其满足以下三个条件:

- I. γ 是分段光滑的, 即 γ 在 $I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k$ 上为分段的 C^∞ 映射, 其中 $\{\gamma(s_i)\}_{i=1}^k$ 表示 γ 的有限个连续但不光滑的点;
- II. γ 是简单的, 即 $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_2), \forall s_1 \neq s_2 \in I$;
- III. γ 是头尾相接的, 即 $\gamma(0) = \gamma(1)$ 。

为了方便, 这里要求不光滑点不在 I 的端点处, 即 $\{s_i\}_{i=1}^k \subset (0, 1)$, 这点完全可以通过改变曲线的参数化做到。

因为本文中所有曲线均满足 Lipschitz 连续条件 (均可求长), 所以分段 C^∞ 简单闭曲线 γ 的单位切映射在 $\{s_i\}_{i=1}^k$ 各点的左右极限均存在 (包括无穷大), 但在这里, 我们也可以不用考虑切映射无穷大的情况, 因为可以通过改变曲线的参数化使之变成有限的。

特别地, 本文还要求 $\{s_i\}_{i=1}^k$ 各点的左右极限不反向, 即

$$f^-(s_i) \neq -f^+(s_i), i = 1, \dots, k.$$

事实上是否可反向不是本质的, 主要是考虑到下文能够更方便地表达不光滑点处的外角。若左右极限刚好反向, 则外角正负号的判定需要根据其他途径, 这就为叙述带来了一定的麻烦。

定理(平面的分段旋转指标定理): 将平面的旋转指标定理中的 C^∞ 简单闭曲线改为平面分段 C^∞ 简单闭曲线。

则存在 (不唯一) 分段 C^∞ 映射 $l: I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$f(s) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi l(s) & \sin 2\pi l(s) \end{pmatrix}, s \in I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k. \quad (43)$$

但不论取哪一个 l , 总有

$$\int_I dl(s) + \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{2\pi} = 1, \quad (44)$$

其中 $\rho_i := \rho(f^+(s_i), f^-(s_i))$, ρ 表示求向量的有向夹角的映射, 逆时针方向为正, 夹角取值范围为 $(-\pi, \pi)$ 。可见 ρ_i 表示了曲线 γ 在点 $\gamma(s_i)$ 处的 (有向的) 外角。

证明:

首先声明等式左边的 $\int_I dl(s)$ 项与 l 的取法无关, 即它是良定义的。

由于去掉一个可测集, Lebesgue 积分值仍不变, 所以自然有

$$\int_I dl(s) = \int_{I \setminus \{s_i\}_{i=0}^k} dl(s) =: \sum_{i=0}^k \left(\int_{E_i} dl(s) \right), \quad (45)$$

其中

$$E_i = \begin{cases} [0, s_1), & i = 0 \\ (s_i, s_{i+1}), & 0 < i < k \\ (s_k, 1], & i = k \end{cases}$$

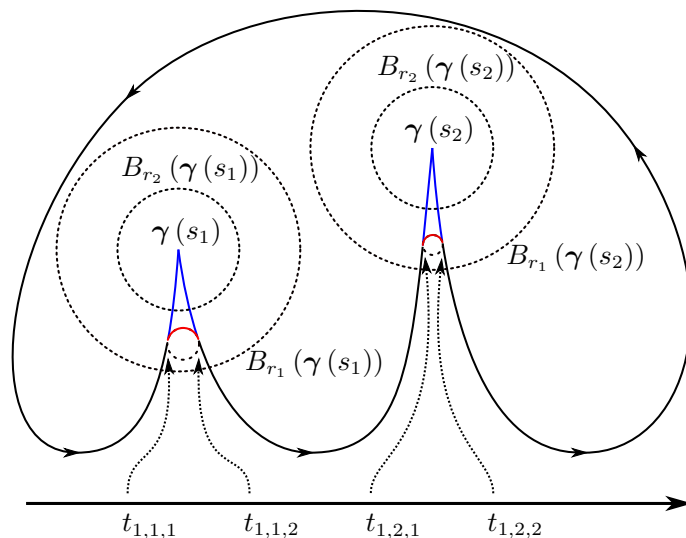


图 6: 不光滑点的平滑化

针对每一段 E_i , $\gamma|_{E_i}$ 都是一段 C^∞ 曲线, 所以自然也就对应了一个 C^∞ 切映射 $f|_{E_i} : E_i \rightarrow S^1$. 而在初始值给定的情况下, 存在唯一的提升 $l|_{E_i} : E_i \rightarrow \mathbb{R}$. 容易说明, 无论初始值取哪个位置, 积分 $\int_{E_i} dl(s)$ 总是保持不变. 因为假如有两个提升 $l|_{E_i}$ 和 $\widetilde{l}|_{E_i}$, 则由于 $p \circ l|_{E_i} = p \circ \widetilde{l}|_{E_i}$, 故 $p \circ l|_{E_i}(0) = p \circ \widetilde{l}|_{E_i}(0)$, 所以 $l|_{E_i}(0)$ 和 $\widetilde{l}|_{E_i}(0)$ 间至多相差一个整数 n , 即 $l|_{E_i}(0) = \widetilde{l}|_{E_i}(0) + n$. 现构造 $\overline{l}|_{E_i} = \widetilde{l}|_{E_i} + n$, 可见 $\overline{l}|_{E_i}$ 也是一个提升, 并且有 $\overline{l}|_{E_i}(0) = l|_{E_i}(0)$, 所以由初始值给定的情况下的提升的唯一性可知 $\overline{l}|_{E_i} = l|_{E_i}$, 从而就有

$$\int_{E_i} dl|_{E_i}(s) = \int_{E_i} d\overline{l}|_{E_i}(s) = \int_{E_i} d\widetilde{l}|_{E_i}(s), \quad (46)$$

以上说明了 $\int_I dl(s)$ 是良定义的。

而后构造一组 C^1 简单闭曲线 $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ 来逼近 γ 。

如图6所示, 对于任意不光滑点 $\gamma(s_i)$, 由于曲线 γ 是分段 C^∞ 的, 总能找到一个足够小的半径 r'_i , 使得 $\gamma(I) \cap B_{r'_i}(\gamma(s_i))$ 是一个连通集, 于是取 $r_1 := \min\{r'_i | i = 1, \dots, k\}$ 。

在每个开圆盘 $B_{r_1}(\gamma(s_i))$ 中, 均可找足够小的圆 $S_{1,i}^1 \subset B_{r_1}(\gamma(s_i))$, 使之与 $\gamma(I) \cap B_{r_1}(\gamma(s_i))$ 相切于两个点 $\gamma(t_{1,i,1}), \gamma(t_{1,i,2})$, 并且这两点满足 $t_{1,i,1} < s_i < t_{1,i,2}$ 。

接着将弧 $C_{1,i} := \gamma(t_{1,i,1}) \frown \gamma(t_{1,i,2})$ 参数化成 $C_{1,i} : (t_{1,i,1}, t_{1,i,2}) \rightarrow \gamma(t_{1,i,1}) \frown \gamma(t_{1,i,2})$ (取弧长参数), 并代替 $\gamma(t_{1,i,1}, t_{1,i,2})$, 由此得到 γ_1 , 即

$$\gamma_1(s) = \begin{cases} C_{1,i}(s), & s \in (t_{1,i,1}, t_{1,i,2}), i = 1, \dots, k \\ \gamma(s), & s \in I \setminus \bigcup_{i=1}^k (t_{1,i,1}, t_{1,i,2}) \end{cases}.$$

当 $j > 1$ 时, 取 $r_j = \min\left\{\frac{r_1}{2^{j-1}}, |\gamma(t_{j-1,i,1}) - \gamma(s_i)|, |\gamma(t_{j-1,i,2}) - \gamma(s_i)|\right\}$, 并同上找到圆 $S_{j,i}^1 \subset B_{r_j}(\gamma(s_i))$ 相切于两个点 $\gamma(t_{j,i,1}), \gamma(t_{j,i,2})$, 且用参数化的弧代替棱角, 得到 γ_j 。如此一来, 就构造了一族曲线 $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ 。

可以发现, 由于各个参数化的弧线以及原曲线 γ 本身均是弧长参数的, 所以任意 γ_j 都是 C^1 的, 但不能保证它们 C^∞ 的. 不过这已经足够了, 因为事实上前一个定理 (平面的分段旋转指标定理) 的证明只需要曲线光滑性达到 C^1 就够了 (即只需能导出连续的切映射), 所以这里的 γ_j 均可以应用前一个定

理，得到

$$\int_I dl_j(s) = 1, \forall j = 1, 2, \dots, \quad (47)$$

这里的 l_j 正是 γ_j 的切映射 f_j 的唯一的提升。

于是就有

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_I dl_j(s) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{I \setminus \bigcup_{i=1}^k [t_{j,i,1}, t_{j,i,2}]} dl_j(s) + \sum_{i=1}^k \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{(t_{j,i,1}, t_{j,i,2})} dl_j(s) \right) \\ &= \int_{I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k} dl(s) + \sum_{i=1}^k \lim_{j \rightarrow \infty} (l_j(t_{j,i,2}) - l_j(t_{j,i,1})) \\ &= \int_I dl(s) + \sum_{i=1}^k \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\rho(f_j(t_{j,i,2}), f_j(t_{j,i,1}))}{2\pi} \\ &= \int_I dl(s) + \sum_{i=1}^k \frac{\rho(f^+(s_i), f^-(s_i))}{2\pi} \\ &= \int_I dl(s) + \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{2\pi}. \end{aligned} \quad (48)$$

□

推论(曲面的分段旋转指标定理): 给定一块正则曲面片 $r: \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S$ ，同时给定曲面片上的一个正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 。考虑 S 上的一条分段 C^∞ 简单闭曲线 $\gamma: I \rightarrow S$ ，和之前一样，它可以写成 $\gamma := r \circ \tilde{\gamma}$ ，其中 $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathcal{D}$ 是分段 C^∞ 映射。

考虑 γ 的切向量 $\frac{d\gamma}{ds}$ 在正交活动标架下的表示 $\frac{d\gamma}{ds} = \left\langle \frac{d\gamma}{ds}, e_j \circ \tilde{\gamma}(s) \right\rangle e_j \circ \tilde{\gamma}(s)$ 。

记其切映射为

$$\begin{aligned} f: I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k &\rightarrow S^1 \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\frac{d\gamma}{ds}|_{s_0}}{\left| \frac{d\gamma}{ds}|_{s_0} \right|}, \end{aligned}$$

则存在（不唯一）分段 C^∞ 映射 $l: I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$f(s) = (\cos 2\pi l(s) \quad \sin 2\pi l(s)), s \in I \setminus \{s_i\}_{i=1}^k, \quad (49)$$

但不论取哪一个 l ，总有

$$\int_I dl(s) + \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{2\pi} = 1. \quad (50)$$

证明:

此证明即上述两个平面的定理的自然的推广，因为上述的证明几乎在切映射上完成。除了一个地方值得注意，平面的旋转指标定理中构造了两组同伦，其中 h_1 涉及割线到切线的同伦，而割线对应到

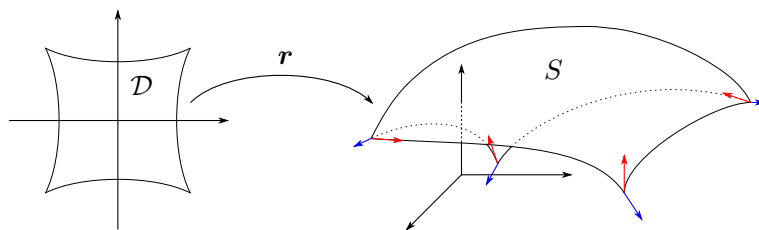


图 7: 局部Gauss-Bonnet定理

曲面中应对应为斜驶线。

□

3.3 局部Gauss-Bonnet定理

定理(局部Gauss-Bonnet定理): 如图7所示, 给定一块正则曲面片 $r: \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} S$, 如果 \mathcal{D} 的边界 $\partial\mathcal{D}$ 是一条分段 C^∞ 简单闭曲线 $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \partial\mathcal{D}$, 则有

$$\iint_{\mathcal{D}} K dA + \int_{\partial\mathcal{D}} k_g ds + \sum_{i=1}^k \rho_i = 2\pi, \quad (51)$$

其中 ρ_i 表示曲线 $\gamma := r \circ \tilde{\gamma}$ 在点 $\gamma(s_i)$ 处的外角。

证明:

取定该曲面片上的一个正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 。对之前得到的Gauss方程的推论

$$-d\omega_{12} = K dA$$

两边积分, 同时使用Stokes公式, 得到

$$\iint_{\mathcal{D}} K dA = - \iint_{\mathcal{D}} d\omega_{12} = - \int_{\partial\mathcal{D}} \omega_{12}. \quad (52)$$

根据曲面分段旋转指标定理, 存在的 C^∞ 映射 $l: I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{d\gamma}{ds} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi l(s) & \sin 2\pi l(s) \\ e_1 \circ \tilde{\gamma}(s) \\ e_2 \circ \tilde{\gamma}(s) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

从而得到

$$(e_3 \circ \tilde{\gamma}(s)) \wedge \frac{d\gamma}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l(s) & \cos 2\pi l(s) \\ e_1 \circ \tilde{\gamma}(s) \\ e_2 \circ \tilde{\gamma}(s) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

计算边界 $\partial\mathcal{D}$ 的测地曲率如下

$$k_g ds = \left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, (e_3 \circ \tilde{\gamma}(s)) \wedge \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle ds = \left\langle d\left(\frac{d\gamma}{ds}\right), (e_3 \circ \tilde{\gamma}(s)) \wedge \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle d \left[\begin{pmatrix} \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \\ \sin 2\pi l & \cos 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l & \cos 2\pi l \\ \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \left[d \begin{pmatrix} \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \\ \sin 2\pi l & \cos 2\pi l \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l & \cos 2\pi l \\ \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \begin{pmatrix} \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \\ \sin 2\pi l & \cos 2\pi l \end{pmatrix} \left[d \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l & \cos 2\pi l \\ \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l & \cos 2\pi l \\ \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \end{pmatrix} (d(2\pi l)) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l & \cos 2\pi l \\ \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \begin{pmatrix} \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \\ \sin 2\pi l & \cos 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin 2\pi l & \cos 2\pi l \\ \cos 2\pi l & \sin 2\pi l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= d(2\pi l) + \cos^2(2\pi l) \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle - \sin^2(2\pi l) \langle d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \\
&\quad - \sin(2\pi l) \cos(2\pi l) \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \sin(2\pi l) \cos(2\pi l) \langle d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \\
&= d(2\pi l) + \cos^2(2\pi l) \omega_{12} - \sin^2(2\pi l) \omega_{21} \\
&\quad - \sin(2\pi l) \cos(2\pi l) \omega_{11} + \sin(2\pi l) \cos(2\pi l) \omega_{22} \\
&= d(2\pi l) + \cos^2(2\pi l) \omega_{12} + \sin^2(2\pi l) \omega_{12} - 0 + 0 \\
&= d(2\pi l) + \omega_{12}, \tag{55}
\end{aligned}$$

从而得到

$$\iint_{\mathcal{D}} K dA = - \int_{\partial \mathcal{D}} \omega_{12} = - \int_{\partial \mathcal{D}} k_g ds - 2\pi dl. \tag{56}$$

再由旋转指标定理的结论，可知

$$2\pi \int_{\partial \mathcal{D}} dl(s) = 2\pi - \sum_{i=1}^k \rho_i. \tag{57}$$

于是综合上述，可整理得到

$$\iint_{\mathcal{D}} K dA + \int_{\partial \mathcal{D}} k_g ds + \sum_{i=1}^k \rho_i = 2\pi. \tag{58}$$

同时，由于第一基本形式 I 和正交标架的选取无关，上式曲线积分变量 ds 又只和第一基本形式 I 有关，所以 $\int_{\partial \mathcal{D}} k_g ds$ 的值在任何正交标架下都不变。并且，二次微分形式 $K dA$ 和同法向的正交标架的选取无关，所以上式中积分值 $\iint_{\mathcal{D}} K dA$ 在任何同法向的正交标架下都不变。

这两条将会在下文证明整体Gauss-Bonnet定理的时候起到作用，原因是证明整体Gauss-Bonnet定理时需要在不同的正则曲面片上运用局部Gauss-Bonnet定理，但每个正则曲面片上选取的正交标架不尽相同（所以整体Gauss-Bonnet定理要求曲面可定向，这保证了正交标架可取同法向）。

□

第四章 整体Gauss-Bonnet定理

本章的第一节首先介绍单纯单形和单纯复形的概念以及光滑流形的单纯剖分定理，之后引入单纯链群的概念并介绍Euler示性数及其组合学计算方法。第二节将重心重分技术，内容包括度量空间、重心重分及其性质、Lebesgue数引理。第三节会证明整体Gauss-Bonnet定理，证明用到了局部Gauss-Bonnet定理、曲面的单纯剖分和重心重分以及Euler示性数的计算。本章内容主要参照《微分几何》^[16]和《Algebraic Topology》^[12]。

4.1 单纯形和Euler示性数

定义： 在无限维欧式空间 \mathbb{R}^∞ （作为向量空间，同时作为拓扑空间）中选定一组有限的线性无关的向量组 $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}^\infty$ ，且保证其中的每个向量均只有有限多分量非0。定义子拓扑空间 $S(\mathcal{V})$ 如下

$$S(\mathcal{V}) := \left\{ \sum_{i=0}^n \mu_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{i=0}^n \mu_i = 1, \mu_i \geq 0, i = 0, \dots, n \right\},$$

称其为一个 n 维的**单纯单形**。称 \mathcal{V} 为**单纯单形** $S(\mathcal{V})$ 的**顶点集**，称该无限维欧式空间 \mathbb{R}^∞ 为**单纯单形空间**。注意到单纯单形空间内事实上可以同时容纳多个单纯单形。

定义： $S(\mathcal{V})$ 为一个单纯单形，称单纯单形 $S(\mathcal{W})$ 为 $S(\mathcal{V})$ 的一个**面**，若 $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{V}$ ，即 $S(\mathcal{W})$ 是 \mathcal{V} 去掉一些顶点所构成的单纯单形，记作 $S(\mathcal{W}) \prec S(\mathcal{V})$ 。

定义： **单纯复形**乃是一族有限的单纯单形的集合 $K = \{S(\mathcal{V}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ，其中 Λ 是指标集，且 $|\Lambda| < \infty$ ，并且 K 满足以下两个条件：

- I. 若 $S(\mathcal{V}_\lambda) \in K$ ，则 $\forall S(\mathcal{W}) \prec S(\mathcal{V}_\lambda)$ 都有 $S(\mathcal{W}) \in K$ ；
- II. $\forall S(\mathcal{V}_{\lambda_1}), S(\mathcal{V}_{\lambda_2}) \in K, S(\mathcal{V}_{\lambda_1}) \cap S(\mathcal{V}_{\lambda_2}) = S(\mathcal{V}_{\lambda_1} \cap \mathcal{V}_{\lambda_2})$ 。

同时定义 $|K|$ 为

$$|K| := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S(\mathcal{V}_\lambda) \subset \mathbb{R}^\infty,$$

称之为**单纯复形** K 的**多面体**。

定义： 设 X 为一个子拓扑空间，若存在一个单纯复形 K 以及一个同胚映射 $h: |K| \xrightarrow{\cong} \bar{X}$ ，则称 h 是 X 的一个（有限）**单纯剖分**或（有限）**三角剖分**。其中 \bar{X} 为 X 的闭包。

注记： 单纯剖分的每个局部事实上是一些（高维）多边形，但由于多边形往往能够进一步重分成（高维）三角形的组合，所以直观上可以把单纯剖分想成有限个（高维）三角形的拼接。

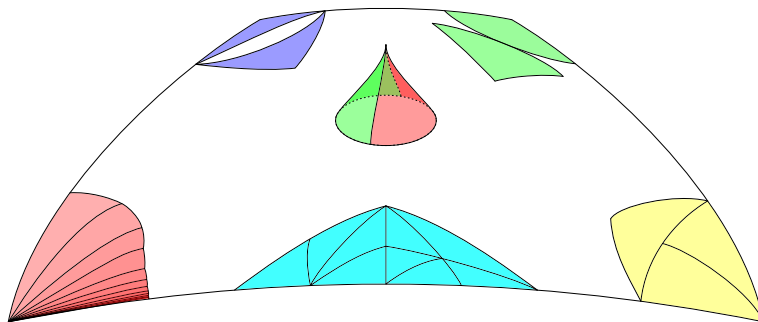


图 8: 局部的三角形的错误和正确的拼接方式

但限于单纯复形的定义，这些三角形的拼接方式并不是随意的，如图8所示，除了正下方的局部的拼接方式以外，其余五个局部的拼接方式都是不正确的。

定理(C^∞ 流形单纯剖分存在性定理): 给定一个 m 维 C^∞ 微分流形 M ， $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个 C^∞ 嵌入 (n 足够大时总能做到)，记 $\Sigma := f(M)$ 。若 Σ 是紧致的，且 Σ 的边界是有限条分段 C^∞ 的简单闭曲线 (或 Σ 是无边的)，则存在 C^∞ 单纯剖分 $h : |K| \xrightarrow{\cong} \Sigma$ 。

证明:

这是一个经典的定理，详细证明可见1961年的Cairns的文章^[6]，由于篇幅所限，这里仅给出证明思路。

对于 Σ 上的任意一点 $\mathbf{x} \in \Sigma$ ，由于 Σ 是 C^∞ 的，所以总存在足够小的 $\rho_{\mathbf{x}} > 0$ ，使得 $\bar{\Sigma} \cap B_{\rho_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$ 是一块连通域，且使得每块 $\bar{\Sigma} \cap B_{\rho_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$ 都足够平坦，以至于各自存在的 C^∞ 自然投影 $\pi_{\mathbf{x}} : \bar{\Sigma} \cap B_{\rho_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\cong} T_{\mathbf{x}}$ 均为 C^∞ 同胚映射，其中 $T_{\mathbf{x}}$ 是 Σ 在点 \mathbf{x} 处的切（超）平面。

再利用 Σ 的紧性，可以找到有限个开球 $\{B_\rho(\mathbf{a}_k)\}_{k=1}^\mu$ 使 Σ 被其覆盖，并且其中

$$\rho := \min \{\rho_{\mathbf{a}_k} \mid k = 1, \dots, \mu\}.$$

接着定义区域

$$F_k := \{\mathbf{x} \in \bar{\Sigma} \mid |\mathbf{a}_k - \mathbf{x}| \leq |\mathbf{a}_i - \mathbf{x}|, i = 1, \dots, \mu\},$$

事实上 F_k 是由超平面

$$H_{ki} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{a}_k - \mathbf{x}| = |\mathbf{a}_i - \mathbf{x}|\}, i \neq k$$

所围成的 n 维超多面体和 $\bar{\Sigma}$ 的交集，并且由 F_k 的定义可以看出 $F_k \subset B_\rho(\mathbf{a}_k), \forall k = 1, \dots, \mu$ 。由于 Σ 和 H_{ki} 都是 C^∞ 的，而 F_k 的边界是他们的交集，所以也是 C^∞ 的。

由此得到， F_k 在 $T_{\mathbf{a}_k}$ 上的象是边界为分段 C^∞ 的 m 维超多面体，经过自然的剖分后（比如重心和各顶点相连），它可以分成若干个 m 维三角形。这些三角形又能和 m 维单纯单形有 C^∞ 同胚的对应（顶点对应顶点）。最后可验证 F_k 之间的拼接方式满足单纯复形的定义。

□

定理: 设 M 为一个具有紧闭包的 m 维 C^∞ 微分子流形, 若 M 存在一个单纯剖分 $h: |K| \xrightarrow{\cong} \overline{M}$, 则 \overline{M} 被 K 中的 m 维单纯单形的象所覆盖, 即

$$\overline{M} = \bigcup_{|\mathcal{V}_\lambda|=m+1} h(S(\mathcal{V}_\lambda)). \quad (59)$$

证明:

严格的证明需要用到一些代数拓扑学知识, 这里给出证明概要。

首先考察 K 中的 n 维($n > m$)单纯单形 $S(\mathcal{V})$ 。考虑其内点 \mathbf{v} , 该点附近的拓扑和 \mathbb{R}^n 同胚。但该点的象 $h(\mathbf{v})$ 的附近的拓扑却和 \mathbb{R}^m 同胚, 原因是 M 为 m 维流形。同调论告诉我们, 如果 $n \neq m$, 那么 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 绝不会同胚, 从而可知, 事实上 K 中并不存在 n 维($n > m$)单纯单形。

再考察 K 中的 n 维($n < m$)单纯单形 $S(\mathcal{V})$ 。考虑其上的一点 \mathbf{v} , 同上可知该点附近的拓扑和该点的象 $h(\mathbf{v})$ 的附近的拓扑同胚, 即和 \mathbb{R}^m 同胚。又因为该点附近的拓扑其实是维数不超过 m 的若干欧式空间的拓扑的拼凑, 所以想要在 \mathbf{v} 的附近出现 \mathbb{R}^m 结构, 只有可能是 $S(\mathcal{V})$ 成为了某个 m 维单纯单形的面, 所以 \mathbf{v} 也属于这个 m 维单纯单形。

□

定义: 设 Σ 为一张正则曲面, $h: |K| \xrightarrow{\cong} \overline{\Sigma}$ 是 Σ 的一个 C^∞ 单纯剖分。现考虑其中的2维单纯单形 $S(\mathcal{V}_\lambda) \in K, |\mathcal{V}_\lambda| = 3$ 。定义 Σ 的子集 $T_\lambda := h(S(\mathcal{V}_\lambda)) \subset \overline{\Sigma}$ 为**曲面上的三角形**。由于这里 h 是 C^∞ 映射, 所以曲面上的三角形是由分三段的 C^∞ 简单闭曲线围成的区域。

定义: 之前定义的单纯单形 $S(\mathcal{V}), \mathcal{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^n$ 仅仅是单纯单形空间 \mathbb{R}^∞ 上的一个子集, 而并没有额外的结构。具体地讲, $S(\mathcal{V})$ 和向量组 \mathcal{V} 中向量的排列次序无关。而现在, 需要额外给单纯单形赋予结构 $\text{Sym}(\mathcal{V})/\sim$, 称之为**定向结构**, 使得拥有定向的单纯单形和向量的排列次序有关。

其中 $\text{Sym}(\mathcal{V})$ 表示集合 \mathcal{V} 的全体置换, 它构成一个群, 称为集合 \mathcal{V} 的**对称群**, 具体地讲

$$\text{Sym}(\mathcal{V}) = \{\sigma: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \mid \sigma \text{ 是双射}\},$$

其中等价关系 \sim 定义为

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 : \iff \text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2).$$

上述函数 $\text{sgn}(\sigma)$ 表示置换 σ 的逆序数符号函数。即若 σ 的逆序数为偶数, 则 $\text{sgn}(\sigma) = +1$, 若 σ 的逆序数为奇数, 则 $\text{sgn}(\sigma) = -1$ 。可见等价关系将 $\text{Sym}(\mathcal{V})$ 分成了两个等价类, 分别是偶逆序数类和奇逆序数类, 这恰好代表了一个定向的单纯单形具有正负两个定向。

符号上为了方便, 我们记**定向的单纯单形**为 $\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$, 并具有关系

$$\hat{S}(\mathbf{v}_{\sigma(0)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n),$$

同时记**定向的单纯复形** \hat{K} 为

$$\hat{K} = \left\{ \pm \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \mid S(\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}) \in K \right\}.$$

定义： 设 K 定向结构成为 \hat{K} ，则可定义 n 阶单纯链群 K_n^S 如下

$$K_n^S := \begin{cases} \mathbb{Z}^{\oplus \{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in \hat{K}\}} & , n \geq 1 \\ 0 & , n \leq 0 \end{cases}$$

其中操作 $\mathbb{Z}^{\oplus(\cdot)}$ 表示从集合范畴到Abel群范畴的一个函子，它将集合作为生成元的集合，生成一个Abel群，即

$$\mathbb{Z}^{\oplus} : (\text{Set}) \longrightarrow (\text{Ab})$$

$$\mathbb{Z}^{\oplus A} = \{\phi : A \longrightarrow \mathbb{Z} \mid \text{至多有限个 } a \in A \text{ 满足 } \phi(a) \neq 0\}.$$

同时 $\mathbb{Z}^{\oplus(\cdot)}$ 将集合间的态射（集合映射）对应到Abel群间的态射（群同态），并保持生成元对应关系不变，但在本文中并没有用到这点。

可见 K_n 是一个自由Abel群，或者说自由 \mathbb{Z} -模，从而 K_n 的任何子群都是正规的。由于 \hat{K} 的元素是有限的，所以形式上可以将 K_n^S 中的元素写成以下线性组合形式

$$\sum_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in \hat{K}} n_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in K_n^S,$$

其中 $n_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)} \in \mathbb{Z}$ 是系数。

定义： 设一个定向的 n 维单纯单形 $\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in \hat{K}$ ，它的边缘乃是单纯链群 K_{n-1}^S 的一个元素，记为 $\partial_n(\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n))$ ，其定义如下

$$\partial_n(\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)) := \begin{cases} \sum_{i=0}^n (-1)^i \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) & , n \geq 1 \\ 0 & , n \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) := \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ ，即把其第 i 个向量取消掉。从几何上可以想象， $\partial_n(\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n))$ 确实是 $\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ 的具有方向性的边缘。同时边缘的概念可以唯一线性扩张成从 K_n^S 到 K_{n-1}^S 的群同态，即

$$\partial_n \left(\sum_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in \hat{K}} n_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \right) := \sum_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in \hat{K}} n_{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)} \partial_n \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n),$$

称算子 $\partial_n : K_n^S \rightarrow K_{n-1}^S$ 为单纯链群 K_n^S 到 K_{n-1}^S 的**边缘算子**。

$$\begin{array}{ccc}
 K_n^S & \xrightarrow{\partial_n} & K_{n-1}^S \\
 \uparrow \text{unique extension} & \nearrow \partial_n & \downarrow \Psi \\
 \{\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \in \hat{K}\} & & \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 \Psi & \searrow & \\
 \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) & &
 \end{array}$$

性质： 设 \hat{K} 为一个定向的单纯复形，则有

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0. \quad (60)$$

证明：

可以计算，对于任何定向 n 维单纯单形 $\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ ，有

$$\begin{aligned}
 & \partial_{n-1} \circ \partial_n (\hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)) \\
 &= \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \right) \\
 &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 & \quad + \sum_{0 \leq i \leq j < n} (-1)^{i+j} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 & \quad + \sum_{0 \leq i \leq j-1 < n} (-1)^{i+j-1} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 & \quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 & \quad - \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \hat{S}(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_n) \\
 &= 0. \quad (61)
 \end{aligned}$$

对于 K_n^S 中一般的元素，由边缘算子的双线性性可知也有上式成立。

□

定义: 设 \hat{K} 为一个定向的单纯复形, 称长正合列 $K^S = (K_n^S, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$K^S : \cdots \longrightarrow K_{n+1}^S \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n^S \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1}^S \longrightarrow \cdots$$

为一个单纯链复形。

同时令 $Z_n^S := \text{Ker}(\partial_n)$, 称之为 K^S 导出的 n 阶单纯闭链群。令 $B_n^S := \text{Im}(\partial_{n+1})$, 称之为 K^S 导出的 n 阶单纯边缘群。

定义: 由于 K_n^S 是自由Abel的, 并且 $\partial_n \circ \partial_{n+1} \equiv 0$, 所以有

$$B_n^S \triangleleft Z_n^S \triangleleft K_n^S. \quad (62)$$

故可令商群 $H_n^S := Z_n^S/B_n^S$, 称之为 K^S 导出的 n 阶单纯同调群。

性质: 若单纯复形 K 和单纯复形 L 的多面体相互同胚, 即 $|K| \cong |L|$, 并且记 K^S 和 L^S 导出的 n 阶单纯同调群分别为 $H_n^S(K)$ 和 $H_n^S(L)$, 则它们是群同构的, 即

$$H_n^S(|K|) \cong H_n^S(|L|), \quad (63)$$

换言之, 单纯同调群具有同胚不变性。

证明:

代数拓扑告诉我们, 一个可单纯剖分的拓扑空间 X 的奇异同调群和单纯同调群是同构的, 即

$$H_n^S(X) \cong H_n(X),$$

其中 $H_n(X)$ 表示 X 的 n 阶奇异同调群。同时奇异同调群又是由奇异链复形导出的, 而由奇异链复形的定义可知奇异链复形也是同胚不变量。故单纯同调群具有同胚不变性。

对于以上结论, 因为要引进奇异同调、奇异链复形的定义, 并且用到相对同调、五项引理等较多代数拓扑知识, 所以在此不详细说明, 如有兴趣, 可阅读《Algebraic Topology》^[12]的第128-129页。

□

注记: 注意到, 以上两个同调群等价是基于拓扑空间可单纯剖分。事实上, 存在一些不可剖分的拓扑空间, 它们虽然没有单纯同调群, 但仍有奇异同调群。所以从这方面讲, 奇异同调群是单纯同调群的一个推广。以下, 在不产生歧义的情况下, 我们将奇异同调群和单纯同调群统称为同调群。

定义: 设 X 是一个拓扑空间, $h: |K| \rightarrow \bar{X}$ 是 X 的一个单纯剖分, H_n^S 是 K^S 导出的同调群, 则称

$$\chi(X) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \text{rank}(H_n^S)$$

为拓扑空间 X 的Euler示性数。其中 $\text{rank}(\cdot)$ 表示群的秩，即群的最小的生成集合的势，即

$$\text{rank}(G) := \inf \{|X| \mid \langle X \rangle = G\},$$

注意如果上述 $X = \emptyset$ ，则规定 $\langle X \rangle = 0$ 。

由于Euler示性数只和同调群有关，所以它也是一个同胚不变量（更严格地讲，它是同伦不变量）。同时要注意，Euler示性数只有在 $\text{rank}(H_n^S), n \in \mathbb{Z}$ 至多有限个不为零的情况下才有意义。

性质： 对于具有紧闭包的正则曲面 Σ ，设其一 C^∞ 单纯剖分为 $h: |K| \rightarrow \Sigma$ ，则 Σ 的Euler示性数 $\chi(\Sigma)$ 可以写成

$$\chi(\Sigma) = F(K) - E(K) + V(K),$$

其中 $F(K), E(K), V(K)$ 分别表示单纯复形 K 中的2阶、1阶、0阶单纯单形的个数，也即分别表示单纯链群 $K_n^S, n = 2, 1, 0$ 的秩，即

$$\begin{aligned} F(K) &:= |\{S(\mathcal{V}) \in K \mid |\mathcal{V}| = 3\}| = \text{rank}(K_2^S), \\ E(K) &:= |\{S(\mathcal{V}) \in K \mid |\mathcal{V}| = 2\}| = \text{rank}(K_1^S), \\ V(K) &:= |\{S(\mathcal{V}) \in K \mid |\mathcal{V}| = 1\}| = \text{rank}(K_0^S), \end{aligned}$$

通常我们分别称 $F(K), E(K), V(K)$ 为复形多面体 $|K|$ 的面数、边数和点数。

证明：

由单纯链群的定义可知 $K_n^S = 0, n < 0$ ，从而有 $H_n^S = 0, n < 0$ 。又由之前的定理得， K 中只有2维及以下的单纯单形，即 $K_n^S = 0, n \geq 3$ ，所以 $H_n^S = 0, n \geq 3$ 。所以有短正合列

$$K^S : 0 \xrightarrow{\partial_3} K_2^S \xrightarrow{\partial_2} K_1^S \xrightarrow{\partial_1} K_0^S \xrightarrow{\partial_0} 0$$

故自然地，可以得到

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \text{rank}(H_n^S) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \text{rank}(H_n^S) \\ &= \text{rank}(H_2^S) - \text{rank}(H_1^S) + \text{rank}(H_0^S) \\ &= \text{rank}(Z_2^S) - \text{rank}(B_2^S) - \text{rank}(Z_1^S) \\ &\quad + \text{rank}(B_1^S) + \text{rank}(Z_0^S) - \text{rank}(B_0^S) \\ &= \text{rank}(\text{Ker}(\partial_2)) - \text{rank}(\text{Im}(\partial_3)) - \text{rank}(\text{Ker}(\partial_1)) \\ &\quad + \text{rank}(\text{Im}(\partial_2)) + \text{rank}(\text{Ker}(\partial_0)) - \text{rank}(\text{Im}(\partial_1)) \\ &= -\text{rank}(\text{Im}(\partial_3)) + (\text{rank}(\text{Im}(\partial_2)) + \text{rank}(\text{Ker}(\partial_2))) \\ &\quad - (\text{rank}(\text{Im}(\partial_1)) + \text{rank}(\text{Ker}(\partial_1))) + \text{rank}(\text{Ker}(\partial_0)) \\ &= -0 + \text{rank}(K_2^S) - \text{rank}(K_1^S) + \text{rank}(K_0^S) \\ &= F(K) - E(K) + V(K). \end{aligned} \tag{64}$$

□

4.2 重心重分术

注记： 由于具有紧闭包的正则曲面 Σ 经过单纯剖分后，表面上的三角形并不总是足够小而落在某个曲面片的闭包 $\overline{S_\alpha} = \overline{r_\alpha(\mathcal{D}_\alpha)}$ 中，所以需要各个三角形进一步操作，从而得到更加细腻的单纯剖分，使得每个小三角形都能落入某个 $\overline{S_\alpha}$ 。本文选择使用的操作是重心重分。

定义： 设 $K = \{S(\mathcal{V}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为一单纯复形，设单纯单形空间的另一向量 \mathbf{b} ，若 \mathbf{b} 使得 $\mathcal{V}_\lambda \cup \{\mathbf{b}\}, \lambda \in \Lambda$ 均为线性无关的向量组，则可定义集族 $C_{\mathbf{b}}(K)$ 如下

$$C_{\mathbf{b}}(K) := \{S(\mathcal{V}_\lambda), S(\mathcal{V}_\lambda \cup \{\mathbf{b}\}), S(\{\mathbf{b}\}) \mid \lambda \in \Lambda\},$$

可以验证 $C_{\mathbf{b}}(K)$ 是一个单纯复形，称其为单纯复形 K 关于顶点 \mathbf{b} 的**单纯锥复形**。由于单纯单形空间是无穷维向量空间，且 \mathcal{V}_λ 和 Λ 都是有限的，所以总可以找到这样的 \mathbf{b} ，即任何单纯复形总能找出它的一个单纯锥复形。

定义： 定义单纯单形 $S(\mathcal{V}), \mathcal{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^n$ 的**重心**为

$$\mathbf{b}_{S(\mathcal{V})} := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i.$$

定义 n 维单纯单形 $S(\mathcal{V})$ 的**1次重心重分** $S(\mathcal{V})^{(1)}$ 如下：

- I. 若 $n = 1$ ，则 $S(\mathcal{V})^{(1)} = \{S(\mathcal{V})\}$ ；
- II. 若 $n > 1$ ，则 $S(\mathcal{V})^{(1)} = C_{\mathbf{b}_{S(\mathcal{V})}} \left(\bigcup_{S(\mathcal{W}) \prec S(\mathcal{V})} S(\mathcal{W})^{(1)} \right)$ 。

可以归纳验证上述定义的II中 $\bigcup_{S(\mathcal{W}) \prec S(\mathcal{V})} S(\mathcal{W})^{(1)}$ 是一个单纯复形，从而对其操作 $C_{\mathbf{b}_{S(\mathcal{V})}}$ 是有意义的。进而可以定义单纯复形 K 的 **k 次重心重分** $K^{(k)}$ 如下：

- I. 若 $k = 1$ ，则 $K^{(1)} = \bigcup_{S(\mathcal{V}) \in K} S(\mathcal{V})^{(1)}$ ；
- II. 若 $k > 1$ ，则 $K^{(k)} = (K^{(k-1)})^{(1)}$ 。

同样也可以验证 $K^{(k)}$ 确实是一个单纯复形。

图9展示了单纯复形三角形（由 $S(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\})$ 和其所有面构成的单纯复形）的1次重心重分和2次重心重分。

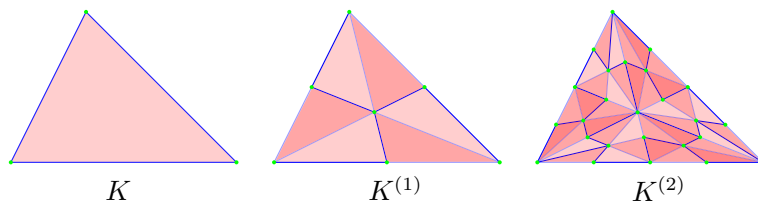


图 9: 单纯复形三角形的重心重分

定义: 给定一个集合 X , 称二元映射 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 为 X 的一个度量, 若 d 满足以下四个条件:

- I. $d(x, x) \geq 0, \forall x \in X$;
- II. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- III. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
- IV. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

称结构 (X, d) 为一个度量空间. 对于 X 上任意一个子集 $A \subset X$, 可定义集合 A 的直径 $\text{diam}(A)$ 为

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

对于 X 上任意一点 x , 和任意一个子集 $A \subset X$, 可定义点 x 到集合 A 的距离 $d(x, A)$ 为

$$d(x, A) := \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

定义: 考虑一具有紧闭包的正则曲面 Σ , 构造二元映射 d_γ 如下

$$d_\gamma: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf \left\{ \int_I \left| \frac{d\gamma(s)}{ds} \right| ds \mid \begin{array}{l} \gamma: I \rightarrow \Sigma \quad \gamma \in C^\infty \\ \gamma(0) = \mathbf{x} \quad \gamma(1) = \mathbf{y} \end{array} \right\},$$

可以验证 d_γ 确为 Σ 的一个度量, 称其为曲面的通常度量. 特别地, 由于 Σ 存在 C^∞ 单纯剖分 $h: |K| \xrightarrow{\cong} \Sigma$, 所以可以定义 d_Σ 如下

$$d_\Sigma: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{|K|}(h^{-1}(\mathbf{x}), h^{-1}(\mathbf{y})),$$

其中 $d_{|K|}$ 是单纯单形空间的欧式度量, 即

$$d_{|K|}: |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_{|K|}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (u_i - v_i)^2}.$$

由于单纯单形中的向量均规定只有有限多分量非0, 所以上式中级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (u_i - v_i)^2$ 是收敛的, 从而上述定义良好. 如此一来, 在度量层面, 空间 Σ 便和空间 $|K|$ 没有区别, 称此度量 d_Σ 为单纯剖分导出的度量. 以下, 我们就使用这种度量.

引理: 设 Σ 为一张具有紧闭包的正则曲面, $h : |K| \xrightarrow{\cong} \bar{\Sigma}$ 是 Σ 的一个 C^∞ 单纯剖分, 则存在更细的 Σ 的 C^∞ 单纯剖分 $h^{(k)} : |K^{(k)}| \xrightarrow{\cong} \bar{\Sigma}$.

证明:

从重心重分的定义可以看出 $|K^{(k)}| = |K|$, 所以只需取 $h^{(k)} = h$ 即可。

□

定理: 设 (Σ, d_Σ) 是一张作为度量空间的具有紧闭包的正则曲面, d_Σ 是由 C^∞ 单纯剖分 $h : |K| \xrightarrow{\cong} \bar{\Sigma}$ 导出的度量。设其中单纯复形 K 为 $K = \{S(\mathcal{V}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, 并设 K 的1次重心重分为 $K^{(1)} = \{S(\mathcal{W}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 。设 K 导出的面上的三角形集合为 $\mathcal{T} := \{T_\lambda = h(S(\mathcal{V}_\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda, |\mathcal{V}_\lambda| = 3\}$, 以及设 $K^{(1)}$ 导出的面上的更细腻的三角形集合为 $\mathcal{T}^{(1)} := \{T_\omega = h(S(\mathcal{W}_\omega)) \mid \omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega| = 3\}$, 类似地也可以定义 $\mathcal{T}^{(k)}$ 。同时定义三角形集合的尺度 $\text{mesh}(\mathcal{T})$ 为

$$\text{mesh}(\mathcal{T}) := \max \{\text{diam}(T_\lambda) \mid T_\lambda \in \mathcal{T}\},$$

则有

$$\text{mesh}(\mathcal{T}^{(1)}) \leq \frac{2}{3} \text{mesh}(\mathcal{T}), \quad (65)$$

进而自然地有

$$\text{mesh}(\mathcal{T}^{(k)}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \text{mesh}(\mathcal{T}). \quad (66)$$

证明:

由重心重分的定义可知, 一个原始的三角形 $T_\lambda := h(S(\mathcal{V})) = h(S(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}))$, 经过重心重分后, 能够产生六个更细的三角形, 它们分别是

$$\begin{aligned} &h(S(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{012}\})), \quad h(S(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{02}, \mathbf{b}_{012}\})), \\ &h(S(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{012}\})), \quad h(S(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{012}\})), \\ &h(S(\{\mathbf{v}_2, \mathbf{b}_{02}, \mathbf{b}_{012}\})), \quad h(S(\{\mathbf{v}_2, \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{012}\})), \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{b}_{01} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1}{2}, \quad \mathbf{b}_{02} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2}{2}, \quad \mathbf{b}_{12} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \quad \mathbf{b}_{012} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{3}.$$

不失一般性, 考虑其中的第一个三角形 $T_\omega := h(S(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{012}\}))$, 由定义可知

$$\begin{aligned} \text{diam}(T_\omega) &= \sup \{d_\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_\omega\} \\ &= \sup \{d_{|K|}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S(\{\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{012}\})\} \\ &= \max \{d_{|K|}(\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{01}), d_{|K|}(\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{012}), d_{|K|}(\mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{012})\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{2} d_{|K|}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1), \frac{2}{3} d_{|K|}(\mathbf{v}_0, \mathbf{b}_{12}), \frac{1}{3} d_{|K|}(\mathbf{b}_{01}, \mathbf{v}_2) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{2} \text{diam}(T_\lambda), \frac{2}{3} \text{diam}(T_\lambda), \frac{1}{3} \text{diam}(T_\lambda) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \text{diam}(T_\lambda). \quad (67)$$

可以想象，对于所有重心重分得到的三角形，它们的直径和原始三角形的直径都有着上述关系，所以有

$$\text{mesh}(\mathcal{T}^{(1)}) \leq \frac{2}{3} \text{mesh}(\mathcal{T}) \quad (68)$$

成立。

再结合上文的引理，由归纳可得到

$$\text{mesh}(\mathcal{T}^{(k)}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \text{mesh}(\mathcal{T}). \quad (69)$$

□

注记： 上述定理可以自然地推广到高维情况，即对于重心重分前后的 n 维三角形的集合 \mathcal{T}_n 以及 $\mathcal{T}_n^{(1)}$ ，有以下不等式成立

$$\text{mesh}(\mathcal{T}_n^{(1)}) \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh}(\mathcal{T}_n). \quad (70)$$

这种推广会在代数拓扑学中起作用，但在本文里，只需用到其2维的情况。

定义： 设 (X, d_X) 是一个度量空间，定义 X 的拓扑基 \mathcal{B}_{d_X} 如下

$$\mathcal{B}_{d_X} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\},$$

其中 $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d_X(x, y) < \varepsilon\}$, $r > 0$ 称为以 x 为圆心，以 ε 为半径的**开球**。

可验证 \mathcal{B}_{d_X} 确为一个拓扑基。称由拓扑基 \mathcal{B}_{d_X} 生成的拓扑 \mathcal{T}_{d_X} 为度量空间 (X, d_X) 的**度量拓扑**。

如果 (X, \mathcal{T}_X) 是一个拓扑空间，赋予其度量 d_X 后，发现度量拓扑和原拓扑相等 $\mathcal{T}_{d_X} = \mathcal{T}_X$ ，则称拓扑空间 X 和该度量 d_X 是**相容的**，即可将原拓扑 \mathcal{T}_X 看作 d_X 导出的度量拓扑。

性质： 单纯复形的多面体 $|K|$ 作为 \mathbb{R}^∞ 的子拓扑空间，自然和度量 $d_{|K|}$ 是相容的。

定义： $(X, d_X, \mathcal{T}_{d_X})$ 是一个的拓扑度量空间，称 X 是**序列紧的**，如果对于任意的 X 中的序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ ，存在收敛子列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{x_k\}_{k=1}^\infty$ 。即存在一个元素 $x \in X$ ，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，都存在正整数 $J_\varepsilon > 0$ ，使得对于任意的 $j > J_\varepsilon$ ，都有 $d_X(x_{k_j}, x) < \varepsilon$ 。

性质： $(X, d_X, \mathcal{T}_{d_X})$ 是紧的拓扑度量空间，则 X 是序列紧的。

证明：

用反证法。假设 X 中的每个点 $x \in X$ ，都存在一个开球 $B_{r_x}(x)$, $r_x > 0$ 只包含序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 的有限项，注意到 $\mathcal{U} := \{B_{r_x}(x) \mid x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖，但是序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 不可能被 \mathcal{U} 的任意有限子覆盖给盖住，原因是其任意有限子覆盖至多只盖住了 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 中的有限多个点。

既然 \mathcal{U} 的任意有限子覆盖都不能盖住全部的 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，那么当然也就不可能盖住整个 X ，这就与 X 是紧的矛盾了，所以假设不成立，即存在一个 $x \in X$ ，对任意的开球 $B_r(x), \forall r > 0$ ， $B_r(x)$ 包含了序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中的无穷多项。

以下来挑选出收敛子列。当 $j = 1$ 时，取 $x_{k_1} = x_1$ ；当 $j > 1$ 时，取 x_{k_j} 为 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \cap B_{\varepsilon_j}(x)$ 中的任意一个元素，其中 $\varepsilon_j = \max \left\{ \frac{1}{n} \mid \frac{1}{n} < x_{k_{j-1}}, n \in \mathbb{N} \right\}$ 。可见这样取得的 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 自然是收敛的。

□

引理(Lebesgue数引理): 设 $(X, d_X, \mathcal{T}_{d_X})$ 是紧的拓扑度量空间，设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 X 的一个开覆盖，则存在一个足够小的正实数 $\delta > 0$ ，对于任何子集 $A \subset X$ ，但凡其直径 $\text{diam}(A) < \delta$ ，就会存在一个 $\alpha \in \mathcal{A}$ ，使得 $A \subset U_\alpha$ 。通常称这个数 δ 为Lebesgue数。

证明:

同样用反证法。假设其不成立，那么对于任意的正整数 $k \in \mathbb{N}$ ，都存在满足 $\text{diam}(A_k) < \frac{1}{k}$ 的集合 A_k ，使得所有的 $A_k, k \in \mathbb{N}$ 都不完全包含在某个 U_α 中。在每个 A_k 里，都任取一个点 $x_k \in A_k, k \in \mathbb{N}$ ，从而形成一条序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 。由先前的命题，紧的拓扑度量空间是序列紧的，所以这里 X 是序列紧的，所以序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow x, x \in X$ 。

由于 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 X 的一个开覆盖，所以必定存在某个 U_α 使得 $x \in U_\alpha$ 。因为 U_α 是开集，所以 x 是 U_α 的内点，所以存在一个 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset U_\alpha$ 。因为 x 是 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow x, x \in X$ 的极限，所以能够取一个充分大的 j ，同时满足 $d_X(x_{k_j}, x) < \frac{r}{2}$ 以及 $k_j > \frac{2}{r}$ ，后者使得 $\text{diam}(A_{k_j}) = \frac{1}{k_j} < \frac{r}{2}$ 。从而对任意的 $a \in A_{k_j}$ 有

$$\begin{aligned} d_X(a, x) &\leq d_X(a, x_{k_j}) + d_X(x_{k_j}, x) \\ &< \text{diam}(A_{k_j}) + \frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \end{aligned} \quad (71)$$

所以有 $A_{k_j} \subset B_r(x) \subset U_\alpha$ ，即 A_{k_j} 完全包含在了 U_α 之中，这就与假设矛盾了。

□

定理: 设 Σ 是一张具有紧闭包的正则曲面，其上的正则曲面片的集族 $\{S_\alpha \mid S_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(\mathcal{D}_\alpha), \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是 Σ 的一个开覆盖，则存在 Σ 的一个 C^∞ 单纯剖分 $h : |L| \rightarrow \Sigma$ ，满足以下要求。记上述单纯复形 L 为 $L = \{S(\mathcal{W}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ ，它使得每个面上的三角形 $T_\omega = h(S(\mathcal{W}_\omega)), |\mathcal{W}_\omega| = 3$ 都能完全落在某个曲面片闭包 $\overline{S_\alpha}$ 之中。

证明:

首先由前文定理， Σ 上存在一 C^∞ 单纯剖分 $h : |K| \rightarrow \Sigma$ 。赋予 Σ 单纯剖分导出的度量 d_Σ ，因为 $|K|$ 是拓扑度量空间，所以 Σ 也是拓扑度量空间。又因为 Σ 是紧的，所以由Lebesgue数引理得， Σ 上存在Lebesgue数 δ 。对单纯复形 $|K|$ 进行 k 次重心重分，由上文的定理，只要取 k 足够大，比如 k 取

$$k := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n > \log_{2/3} \frac{\delta}{\text{mesh}(\mathcal{T})} \right\}, \quad (72)$$

就能使得

$$\text{mesh}(\mathcal{T}^{(k)}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \text{mesh}(\mathcal{T}) < \delta, \quad (73)$$

从而令 $L = K^{(k)}$, 任何面上的三角形 $T_\omega \in \mathcal{T}^{(k)}, |\mathcal{W}_\omega| = 3$, 都有

$$\text{diam}(T_\omega) \leq \text{mesh}(\mathcal{T}^{(k)}) < \delta, \quad (74)$$

所以由Lebesgue数引理得到, 任何三角形 T_ω 都能完全落在某个曲面片 $\overline{S_\alpha}$ 之中。

□

4.3 整体Gauss-Bonnet定理

定理(整体Gauss-Bonnet定理): 给定一张具有紧闭包的可定向的正则曲面 $f: M \xrightarrow{\cong} \Sigma$, 如果 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 是一条分段 C^∞ 简单闭曲线 $\gamma: I \rightarrow \Sigma$, 则有

$$\iint_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k_g ds + \sum_{i=1}^k \rho_i = 2\pi\chi(\Sigma), \quad (75)$$

其中 ρ_i 表示曲线 γ 在点 $\gamma(s_i)$ 处的外角。

注意这里 \iint_{Σ} 和 $\int_{\partial\Sigma}$ 事实上是指在此值域对应的参数域上作积分, 但由于正则曲面的参数域是若干区域拼贴而成的, 所以为了方便, 这里的积分区域直接写成了值域 (绪论中也如此)。

证明:

由之前的定理得, 存在 Σ 的一个 C^∞ 单纯剖分 $h: |L| \rightarrow \Sigma$, 记 $L = \{S(\mathcal{W}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$, 它使得每个面上的三角形 $T_\omega = h(S(\mathcal{W}_\omega)), |\mathcal{W}_\omega| = 3$ 都能完全落在某个曲面片闭包 $\overline{S_\alpha}$ 之中。

接着在每个面上的三角形 T_ω 上使用局部Gauss-Bonnet定理, 并且取所有三角形的边界方向相同 (可行性由曲面的可定向性保证), 得到

$$\iint_{T_\omega} K dA + \int_{\partial T_\omega} k_g ds + \sum_{i=1}^3 \theta_{\omega i} = 2\pi, \quad (76)$$

其中 $\theta_{\omega i}$ 是 T_ω 的三个外角。由于面上的三角形的个数是有限的, 所以可将上述等式关于所有面上的三角形求和, 得到

$$\iint_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k_g ds + \sum_{\omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega|=3} \sum_{i=1}^3 \theta_{\omega i} = \sum_{\omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega|=3} 2\pi = 2\pi F(L), \quad (77)$$

其中 $\int_{\partial T_\omega} k_g ds$ 求和变成 $\int_{\partial\Sigma} k_g ds$ 是因为在每个三角形的不作为 Σ 边界的边上, 根据单纯复形的定义, $\int_{\partial T_\omega} k_g ds$ 刚好出现两次且方向相反。而第一基本形式 I 与正交标架的无关性又保证了积分 $\int_{\partial T_\omega} k_g ds$ 在不同的曲面片下的值相等, 所以同一内部边上的积分恰好相消。

而后考虑到同一内部顶点的三角形内角和是 2π , 同一边界顶点的三角形内角和是 π (在边界的一般位置) 或 $\pi - \rho_i$ (恰好在边界的不光滑点处)。为了方便, 记 $V_I(L)$ 为落在 Σ 内部的顶点数, 记 $V_B(L)$ 为

落在 Σ 边界的顶点数，记 $E_I(L)$ 为落在 Σ 内部的边数，记 $E_B(L)$ 为落在 Σ 边界的边数。则有关系

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega|=3} \sum_{i=1}^3 \theta_{\omega_i} &= \sum_{\omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega|=3} 3\pi - \sum_{\omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega|=3} \sum_{i=1}^3 \pi - \theta_{\omega_i} \\ &= 3\pi F(L) - \left(2\pi V_I(L) + \pi V_B(L) - \sum_{i=1}^k \rho_i \right). \end{aligned} \quad (78)$$

观察到一个三角形对应三条边，而一个内部的边对应两个三角形，一个外部的边对应一个三角形，所以有

$$3F(L) = 2E_I(L) + E_B(L). \quad (79)$$

又观察到边界上的顶点数和边数相同，即

$$V_B(L) = E_B(L). \quad (80)$$

综合以上观察，得到

$$\begin{aligned} &3\pi F(L) - \left(2\pi V_I(L) + \pi V_B(L) - \sum_{i=1}^k \rho_i \right) \\ &= 2\pi E_I(L) + \pi E_B(L) - \left(2\pi V_I(L) + \pi V_B(L) - \sum_{i=1}^k \rho_i \right) \\ &= 2\pi E_I(L) + \pi E_B(L) - \left(2\pi V_I(L) + \pi V_B(L) - \sum_{i=1}^k \rho_i \right) + \pi (E_B(L) - V_B(L)) \\ &= 2\pi (E_I(L) + E_B(L)) - 2\pi (V_I(L) + V_B(L)) + \sum_{i=1}^k \rho_i \\ &= 2\pi E(L) - 2\pi V(L) + \sum_{i=1}^k \rho_i, \end{aligned} \quad (81)$$

由此得到

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k_g ds + \sum_{\omega \in \Omega, |\mathcal{W}_\omega|=3} \sum_{i=1}^3 \theta_{\omega_i} \\ &= \iint_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k_g ds + 2\pi E(L) - 2\pi V(L) + \sum_{i=1}^k \rho_i \\ &= 2\pi F(L), \end{aligned} \quad (82)$$

从而移项得到

$$\iint_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k_g ds + \sum_{i=1}^k \rho_i = 2\pi F(L) - 2\pi E(L) + 2\pi V(L) = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (83)$$

□

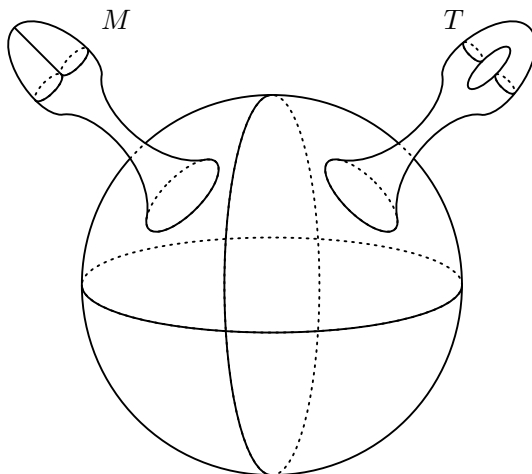


图 10: 安装一个交叉帽和一个环柄的球面

推论: 给定一张具有紧闭包的可定向的正则曲面 $f: M \xrightarrow{\cong} \Sigma$, 如果 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 是有限条分段 C^∞ 简单闭曲线 $\gamma_j: I \rightarrow \Sigma, j = 1, \dots, n$, 则有

$$\iint_{\Sigma} K dA + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j(I)} k_g ds + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{k_j} \rho_{ji} = 2\pi\chi(\Sigma), \quad (84)$$

其中 ρ_{ji} 表示曲线 γ_j 在点 $\gamma_j(s_{ji})$ 处的外角。

推论: 给定一张紧致无边的可定向的正则曲面 $f: M \xrightarrow{\cong} \Sigma$, 则有

$$\iint_{\Sigma} K dA = 2\pi\chi(\Sigma). \quad (85)$$

注记: 根据曲面分类定理, 二维紧致无边的流形在同胚意义下可分为以下三大类:

- I. 球面上安装 $g(g \geq 0)$ 个环柄 T ;
- II. 球面上安装 $g(g \geq 0)$ 个环柄 T 和 1 个交叉帽 M ;
- III. 球面上安装 $g(g \geq 0)$ 个环柄 T 和 2 个交叉帽 M 。

其中 g 称为流形的亏格, 并且交叉帽事实上同胚于 Möbius 带。如图 10 是安装了一个交叉帽和一个环柄的球面的例子。

分类定理同时指出, 只有第一类流形是可以嵌入 \mathbb{R}^3 的, 且是可定向的。又由于可定向曲面的亏格和 Euler 示性数存在关系

$$\chi(\Sigma) = 2(1 - g), \quad (86)$$

故对上述第一类曲面使用 Gauss-Bonnet 定理可以得到

$$\iint_{\Sigma} K dA = 4\pi(1 - g). \quad (87)$$

第五章 两个应用

本章会介绍Gauss-Bonnet定理的两个应用。第一节介绍定理在微分拓扑学中的一个应用，参考《微分几何》^[16]。第二节介绍其在物理学中的一个应用，参考文章^[11]。

5.1 Poincaré-Hopf指标定理

第一章已给出了曲面片上（ C^∞ ）向量场的概念，在这里可以进一步给出曲面上的（ C^∞ ）向量场的定义。给定一正则曲面 Σ ，同理可定义 Σ 上的切丛 $T\Sigma$ 为 Σ 上所有切平面的集合。这里只需注意到曲面上同一个点对应到不同参数域下给出的切丛总是相同的。如此一来，便可同理定义曲面上的 C^∞ 向量场 $X : \Sigma \rightarrow T\Sigma$ 。

假如给定了一个向量场 $X : \Sigma \rightarrow T\Sigma$ ，还能给出该向量场对应的单位向量场

$$\hat{X} : \Sigma \rightarrow T\Sigma$$

$$\hat{X}(p) = \begin{cases} \frac{X(p)}{|X(p)|} & , X(p) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , X(p) = \mathbf{0} \end{cases}.$$

对于紧致无边的可定向曲面而言，其处处非零的 C^∞ 向量场是不一定存在的，所以一般而言，向量场 \hat{X} 会附带一个零点集 $Z := \{p \in \Sigma \mid \hat{X}(p) = \mathbf{0}\}$ 。并且显然 X 的零点集和 \hat{X} 的零点集相同。 C^∞ 向量场的零点可以分为孤立零点和非孤立零点两类。所谓孤立零点，即存在一个包含该零点的开集，使得其他零点都不在该开集之内。非孤立零点则是除上条件的其余零点。此处，我们只考虑仅附带孤立零点的紧致无边曲面上的 C^∞ 向量场。可以注意到，由于紧致集的无穷子集必有聚点，所以仅附带孤立零点的紧致无边曲面上的 C^∞ 向量场的零点必定只有有限多个。给定一个仅有孤立零点的单位 C^∞ 向量场 \hat{X} ，除了有限个零点之外，其余每点 $p \in \Sigma$ 均有与 $\hat{X}(p)$ 右手性正交的单位切向量 $\hat{Y}(p)$ 。可以看出 \hat{Y} 也是一个 C^∞ 向量场，并且 \hat{X} 和 \hat{Y} 能够复合上局部的参数映射后作为 $\Sigma \setminus Z$ 上的一组正交活动标架。

在每个零点 $p_i \in Z$ 周围均找一系列具有 C^∞ 边界的开区域 $\{U_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ，且满足以下四条：

- I. $U_{i,1} \cap Z = \{p_i\}, \forall i = 1, \dots, N;$
- II. $U_{i_1,1} \cap U_{i_2,1} = \emptyset, \forall i_1 \neq i_2;$
- III. $U_{i,1} \supset U_{i,2} \supset \dots, \forall i = 1, \dots, N;$
- IV. $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(U_{i,j}) = 0, \forall i = 1, \dots, N.$

以上第三条中用到的度量取 Σ 的通常度量 $d\gamma$ 即可。记 $\partial U_{i,j} := \gamma_{i,j} : I \rightarrow \Sigma$ ，为代表其边界的弧长参数曲线。根据旋转指标定理，存在 $\frac{d\gamma_{i,j}}{ds} : I \rightarrow S^1$ 的一个提升 $l_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$ 。则可定义向量场 X 在零点 p_i 处的指数 $I(p_i)$ 为

$$I(p_i) := \lim_{j \rightarrow \infty} \int_I dl_{i,j}(s) = l_{i,j}(1) - l_{i,j}(0).$$

由于 $l_{i,j}(0)$ 和 $l_{i,j}(1)$ 均为整数，所以 $I(p_i)$ 为整数。

图11列举了一些零点的指数和零点附近的向量场走向。

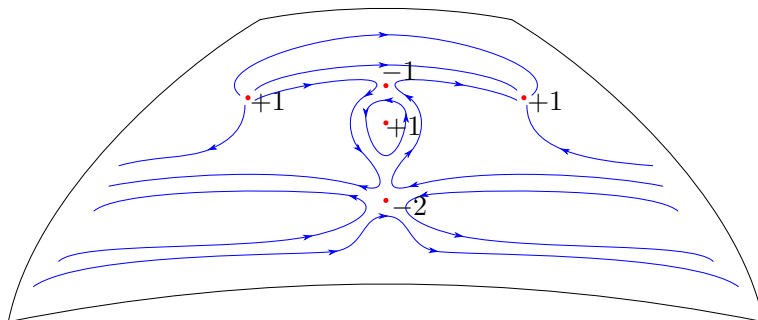


图 11: 零点的指数

定理(Poincaré-Hopf指标定理): 设 Σ 为一张紧致无边的可定向曲面, $X: \Sigma \rightarrow T\Sigma$ 为 Σ 上的仅有孤立零点的 C^∞ 向量场, 则有

$$\sum_{i=1}^N I(p_i) = \chi(\Sigma), \quad (88)$$

其中 p_i 为 X 的零点。

证明:

同整体Gauss-Bonnet定理的证明, 存在 $\Sigma \setminus (\bigcup_{i=1}^N U_{i,j})$ 的足够细的 C^∞ 单纯剖分 h_j , 记面上的三角形为 T_ω 。再由局部Gauss-Bonnet定理的证明可知

$$k_g ds = d(2\pi l) + \omega_{12}, \quad (89)$$

故得

$$2\pi \int_{\partial T_\omega} dl = - \int_{\partial T_\omega} \omega_{12} + \int_{\partial T_\omega} k_g ds = \iint_{T_\omega} K dA + \int_{\partial T_\omega} k_g ds. \quad (90)$$

将此公式对于所有曲面三角形求和, 得到

$$2\pi \sum_{i=1}^N \int_I dl_{i,j}(s) = \iint_{\Sigma \setminus (\bigcup_{i=1}^N U_{i,j})} K dA + \int_{\bigcup_{i=1}^N \partial U_{i,j}} k_g ds. \quad (91)$$

从而由整体Gauss-Bonnet定理可知

$$\iint_{\Sigma \setminus (\bigcup_{i=1}^N U_{i,j})} K dA + \int_{\bigcup_{i=1}^N \partial U_{i,j}} k_g ds = 2\pi \chi \left(\Sigma \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N U_{i,j} \right) \right). \quad (92)$$

于是综上, 取 $j \rightarrow \infty$ 得到

$$\sum_{i=1}^N I(p_i) = \chi(\Sigma). \quad (93)$$

□

注记: 上述定理证明不可直接用旋转指标定理, 原因在于各零点处没有定义正交标架, 故各 $U_{i,j}$ 内部并无完整的 C^∞ 正交标架场。此外由证明过程可见, 该定理和取何种 $\{U_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ 无关。

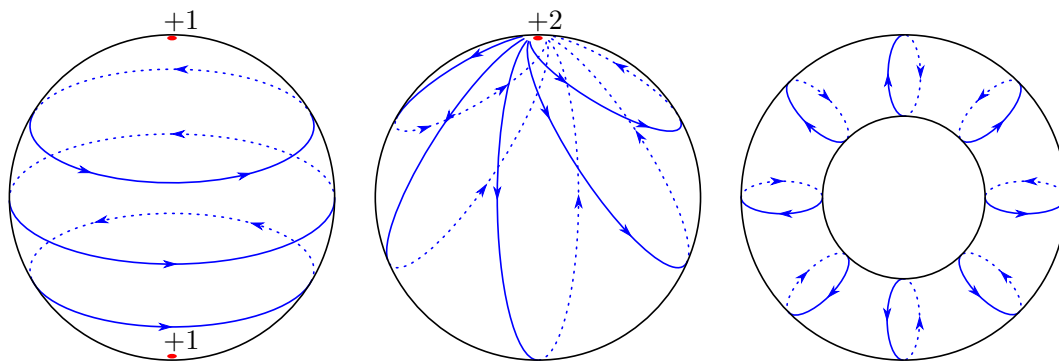
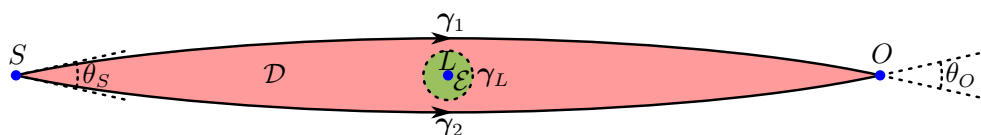

 图 12: 双零点和单零点的球面 C^∞ 向量场以及无零点的环面 C^∞ 向量场


图 13: 引力透镜示意图

注记: 如图12所示, 球面上的 C^∞ 向量场必有零点, 因为 $\chi(S^2) = 2 \neq 0$, 该论断也被戏称为“毛球定理”。若其应用在气象学上, 即可表述成地球上每时每刻总存在某一点是无风的。更一般地, 在紧致无边的可定向曲面中, 只有环面可能存在没有零点的 C^∞ 向量场, 因为只有 $\chi(T) = 0$ 。

5.2 引力透镜理论

Gauss-Bonnet定理在数学之外的领域也有诸多应用, 比如2008年G W Gibbons和M C Werner所写的文章^[11]叙述了Gauss-Bonnet定理在引力透镜理论中的一个应用。他们把Gauss-Bonnet定理运用到引力透镜理论中, 将其应用于透镜的光学度量上, 根据光学度量的Gauss曲率来计算散射角, 并在此框架下讨论了Schwarzschild透镜、Plummer球面以及奇异等温球面等模型的情况。

以下介绍该理论的主要思想。如图13所示, 点 L 表示一颗大质量星体, 由于 L 造成了时空弯曲, 所以图示平面可看作配备Riemann度量 g 的二维Riemann流形。图中点 S 表示光源, 点 O 表示观察者, γ_1 和 γ_2 表示两条光线, D 是 γ_1 和 γ_2 所围的区域, θ_S 和 θ_O 分别表示两条光线在光源和观察者处的夹角。假设 S 和 O 都距离 L 很远, 并且 θ_S 和 θ_O 都很小。同时由物理学知识可知 γ_1 和 γ_2 均为测地线, 所以其上的测地曲率处处为0。

如果 L 处度量是非奇异的, 那么由Gauss-Bonnet定理可得

$$\iint_D K dA + (\pi - \theta_S) + (\pi - \theta_O) = 2\pi\chi(D) = 2\pi, \quad (94)$$

即

$$\iint_D K dA = \theta_S + \theta_O. \quad (95)$$

如果 L 处度量是奇异的, 那么构造一条包围 L 的闭曲线 γ_L 将 L 挖去(包围区域记作 \mathcal{E}), 得

$$\iint_{D \setminus \mathcal{E}} K dA + \int_{\gamma_L} k_g ds + (\pi - \theta_S) + (\pi - \theta_O) = 2\pi\chi(D \setminus \mathcal{E}) = 0. \quad (96)$$

上式中的曲率积分值可根据具体的光学模型得到, 故由此可通过测量 θ_O 来得到散射角 θ_S 。

参考文献

- [1] Abbena E, Salamon S, Gray A. Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica[M]. Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [2] Allendoerfer C B. The Euler number of a Riemann manifold[J]. American Journal of Mathematics, 1940, 62(1): 243-248.
- [3] Allendoerfer C B, Weil A. The gauss-bonnet theorem for riemannian polyhedra[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1943, 53(1): 101-129.
- [4] Bao D, Chern S S. A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces[J]. Annals of mathematics, 1996, 143(2): 233-252.
- [5] Bonnet O. Mémoire sur la théorie général des surfaces[M]. Bachelier, 1848.
- [6] Cairns S S. A simple triangulation method for smooth manifolds[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1961, 67(4): 389-390.
- [7] Chern S. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds[J]. Annals of mathematics, 1944: 747-752.
- [8] Chern S. Integral formulas for the characteristic classes of sphere bundles[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1944, 30(9): 269.
- [9] Fenchel W. On total curvatures of Riemannian manifolds: I[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1940, 1(1): 15-22.
- [10] Gauss C F. Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comment[J]. Soc. Sci. Gotting. Recent. Classis Math, 1827, 6: 1827.
- [11] Gibbons G W, Werner M C. Applications of the Gauss-Bonnet theorem to gravitational lensing[J]. Classical and Quantum Gravity, 2008, 25(23): 235009.
- [12] Hatcher A. Algebraic Topology[M]. Cambridge University Press, 2002.
- [13] Hopf H. Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen[J]. Mathematische Annalen, 1926, 95(1): 340-367.
- [14] Hopf H. Vektorfelder inn-dimensionalen mannigfaltigkeiten[J]. Mathematische Annalen, 1927, 96(1): 225-249.
- [15] Wu H H. Historical development of the Gauss-Bonnet theorem[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51(4): 777-784.
- [16] 彭家贵, 陈卿. 微分几何[M]. 高等教育出版社, 2002.
- [17] 沈一兵. 整体微分几何初步: 第三版[M]. 高等教育出版社, 2009.

致谢辞

庚子殊春，白虹贯日。瘴气坼天地，时运破常规。苍生海粟，百废待兴。俯仰未能弭，寻念非但一。天茧缚我，在家出家。脱兔游鱼松窗外，始知苦淡出清妍。传神其实亦无法，勤习下笔知所从。要使笔锋杀尽山中兔，且让墨池飞出北溟鱼。

终日寄乐几何，半夜依旧能狂。借持螯手破算式，一息尚存要读书。虽知咬得菜根百事可为，纵使祖上托梦一文难成。几处关键，不领真意。辗转无果，头皮也麻。正在有意无意间，得开一切未曾有。劲笔行至会心处，书被催成墨未浓。以为袖中有东海，无香因真水；实乃信手忘工拙，山鸡爱其羽。正所谓学然后知不足，撰然后晓困顿。

论文虽素，淡中有味。先笃实，后立异。荟萃中外贤达之清芬，不施移花接木之手段。除年颜盛壮人气望，幸比邻不吝赐精微。万物俱有道性，众人皆为吾师。在此怀恩谢四方，虽非涕零情由衷。一谢椿萱长教育，石泉素湍为有源。二谢诸师倾囊授，丹心热血沃新花。三谢同道共舟济，雄俊集聚话古今。四谢恒友乐未央，暂得逍遥闹钱塘。

金雁欹斜，心随东棹。流光欺人忽蹉跎，别去方知此味长。西湖四时多浪漫，屏峰晴雨总难得。晓春烟柳秀，槐夏午云清。鹤秋江月碎，雪冬茶火明。虫兽从来有义，草木未必无情。落花水面皆文章，好鸟枝头亦朋友。头年为名常检束，来年拥书笑流云。去年虚室始生白，今朝觉岸无成岸。

四载寒窗趁精华，交契东西南北人。投分结缘显潮师，传道解惑幸三生。达理恕人海燕师，惜才爱君听无音。行高莫过丹婷姐，惠恩寸心言不尽。博古通今震哥绝，潇洒磊落在风尘。小杰学长扶正道，儒雅多才亦吾师。广哲大佬真性情，卧看人间未见书。见贤思齐朱子昊，搜尽奇峰打草稿。十指流云朱小雨，诗歌琴酒乐其志。甬乐文浩上下和，粹然无事小神仙。缪神正武人第一，不露文章世已惊。高世之智潘朱磊，风流谈笑吐霓虹。福慧双修徐哲锋，清勤孝友为人真。宇宙为龛陈锐兄，也无浪喜也无忧。求真论道牟毅成，质诸鬼神而无疑。宇航宇潇踏飞黄，他日相逢下车揖。邵珂徐克王蒋铭，敢与鹏鸟同风起。进哥丁哥张轶剑，玄洲彦丰李仁宇，尘网一去二十年，中心臧之何日忘？炳炳小朗汪锦柱，襟上酒痕记昔春。尺素函绵邈，滂沛不一一。只愿无事常相见，力图有限趁无穷。

万古花开月圆，偶尔云散雪消。昨日不比前日老，来年春胜今年春。荏苒年岁如箭，要愁那得工夫？虽我本性是疏散，徘徊材与不材间。但求处厚修玄妙，试比汉后隋前人。我之为我，自有我在。休轻追七步，须重惜三余。恒存君子心，能行丈夫事。悟有好累此生，知来者犹可追。

倾海滔滔悬河语，情长纸短言不及。开樽引觞念旧意，但愿长醉不愿醒。一点扶桑送浮云，奈何急流催舟行。恭祝众人安且吉，业立功成总有期！

槐月初十戊正二刻作于钱江